6　微分形式の引き戻し

多様体のあいだの写像 $F\colon M \to N$ に対し，$F^*\colon \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ が線型写像であることを確かめる．$F^*(\omega+\eta) = F^*\omega + F^*\eta$ および $F^*(c\omega) = cF^*\omega$ を示したいのだが，たとえば前者が意味するのは，任意の点 $p \in M$ に対し $(F^*(\omega+\eta))_p = (F^*\omega)_p + (F^*\eta)_p$ が成立するということである．そこで実際に任意の v_1，v_2，……，$v_k \in T_pM$ を代入してみる．すると

$$\begin{aligned}(F^*(\omega+\eta))_p(v_1, v_2, \dots, v_k) &= (\omega+\eta)_{F(p)}((F_*)_p v_1, (F_*)_p v_2, \dots, (F_*)_p v_k)\\ &= \omega_{F(p)}((F_*)_p v_1, (F_*)_p v_2, \dots, (F_*)_p v_k) + \eta_{F(p)}((F_*)_p v_1, (F_*)_p v_2, \dots, (F_*)_p v_k)\\ &= (F^*\omega)_p(v_1, v_2, \dots, v_k) + (F^*\eta)_p(v_1, v_2, \dots, v_k)\end{aligned}$$

だから $(F^*(\omega+\eta))_p = (F^*\omega)_p + (F^*\eta)_p$ がわかった．もう一つの式についても同様．

30.　$F\colon M \to N$ とする．$\omega \in \Omega^k(N)$，$f \in C^\infty(N)$ に対し $F^*(f\omega) = (f \circ F)F^*\omega$ を示せ．

31.　$F\colon M \to N$ とする．$\omega \in \Omega^k(N)$，$\eta \in \Omega^l(N)$ に対し $F^*(\omega \wedge \eta) = (F^*\omega) \wedge (F^*\eta)$ を示せ．

32.　$F\colon M \to N$，$G\colon N \to L$ およびそれらの合成 $G \circ F\colon M \to L$ について，各々に対応する微分形式の引き戻し写像が $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$ をみたすことを示せ．

次は引き戻しのごく簡単な計算練習．

33.　$F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $F(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ により定める．

(1)　F はどのような写像か．初等幾何学的に説明せよ．

(2)　終域の標準的な座標系を (X, Y) と書き，$\omega = dX \wedge dY$ とおく．$F^*\omega$ を求めよ．

次の問題では，一般に n 次元実ベクトル空間上の交代的な n 重線形形式 $\mu \in \bigwedge^n V^*$ について，$\mu \neq 0$ ならば V の任意の基底 v_1，v_2，……，v_n について $\mu(v_1, v_2, \dots, v_n) \neq 0$ であることを用いてよい．

34.　$\mathbb{R}^4$ の微分 1 形式 $\omega = -y\,dx + x\,dy - w\,dz + z\,dw$ を S^3 へと引き戻して得られる微分 1 形式 $\omega|_{S^3}$ を θ と書く*．θ が S^3 上の接触形式（問題 26）であること，すなわち $\eta = \theta \wedge d\theta \in \Omega^3(S^3)$ が nowhere vanishing であることを確かめたい．

(1)　$\mathbb{R}^4$ において $\tilde{\eta} = \omega \wedge d\omega$ と定める．$\tilde{\eta}|_{S^3} = \eta$ を示せ．

(2)　$\mathbb{R}^4$ で定義された関数 $h = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$ を考える（S^3 は h のレベル集合 $h^{-1}(1)$ である）．$dh \wedge \tilde{\eta}$ が $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ で nowhere vanishing であることを確かめよ．

(3)　η が S^3 で nowhere vanishing であることを結論せよ．

*今後ずっと，とくに断らないかぎり，S^{n-1} はすべて $\mathbb{R}^n$ の原点を中心とする単位球面とする．

次は円周 S^1 の微分 1 形式について実感をもつための問題である．

$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ で定義される曲線 $\gamma\colon \mathbb{R} \to S^1$ を考える．S^1 上の各点 p に対し，$\gamma(t_0) = p$ をみたす時刻 $t_0 \in \mathbb{R}$ をとり，その時刻における速度ベクトルを

$$X_p = \left.\frac{d\gamma}{dt}\right|_{t=t_0}$$

と書くことにして，ベクトル場 $X = \{X_p\}_{p\in S^1}$ を定義する．

与えられた $p \in S^1$ に対し $\gamma(t_0) = p$ をみたす t_0 は一意的でなく，$2m\pi$（m は整数）を加える任意性がある．しかし，どの t_0 を採用しても X_p は同じである．そのことは，たとえば，点 p の開近傍で定義された関数 f への作用が一致することをみればわかる．

$$\left.\frac{d\gamma}{dt}\right|_{t=t_0}(f) = \frac{d(f\circ\gamma)}{dt}(t_0), \qquad \left.\frac{d\gamma}{dt}\right|_{t=t_0+2m\pi}(f) = \frac{d(f\circ\gamma)}{dt}(t_0+2m\pi)$$

であるが，関数 $f\circ\gamma$ は周期 2π をもつので右辺同士は等しい．

35. S^1 上の微分 1 形式 $\alpha = \{\alpha_p\}_{p\in S^1}$ を $\alpha_p(X_p) = 1$ と定めることで定義する（X_p はこの接ベクトル 1 個だけで接空間 T_pS^1 の基底をなすので，$\alpha_p \in T_p^*S^1$ を定めるには X_p に対する値だけを決めればよい）．

(1) $\gamma\colon \mathbb{R} \to S^1$ による α の引き戻し $\gamma^*\alpha$ を求めよ．

(2) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ の微分 1 形式

$$\omega = \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$$

を考える（問題 5）．ω の S^1 への引き戻し $\omega|_{S^1}$ が α に等しいことを示せ．

36. $\gamma\colon \mathbb{R} \to S^1$ の $[0, 2\pi]$ への制限を γ_1 として，線形写像 $I\colon \Omega^1(S^1) \to \mathbb{R}$ を線積分（問題 16）により

$$I(\omega) = \int_{\gamma_1} \omega$$

と定義する．前問の α は各点 $p \in S^1$ において $\alpha_p \neq 0$ をみたすので，$\dim T_p^*S^1 = 1$ に注意すれば，任意の $\omega \in \Omega^1(S^1)$ はある $\varphi \in C^\infty(S^1)$ を用いて $\omega = \varphi\alpha$ とあらわせる．そうしたとき上式の右辺を線積分の定義にもとづき書き換えると

$$I(\omega) = \int_0^{2\pi} (\varphi\circ\gamma)(t)\,dt$$

となる．

(1) $\omega \in \Omega^1(S^1)$ が完全形式ならば $\omega \in \ker I$ であることを示せ．

(2) 逆に，$\omega \in \ker I$ ならば ω は完全形式であることを示せ．［ヒント：もし $\omega = df$ ならば $\gamma^*\omega = d(\gamma^* f) = d(f\circ\gamma)$ となるはずなので，$\gamma^*\omega = dg$ をみたす関数 $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ について考察する．］

(3) $H^1_{\mathrm{dR}}(S^1) \cong \mathbb{R}$ を示せ．