5　多様体上の微分形式 (3)

24.　$\mathbb{R}^2$ における $\{(x,0)\in\mathbb{R}^2 \mid x \leqq 0\}$ の補集合を U とする．U において標準的な座標系 (x,y) のほかに極座標系 (r,θ) を考える．ただし $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ である．

任意の微分 1 形式 ω は $\omega = f\,dx + g\,dy$ とあらわせる．$d\omega$ を次の 2 通りの方法で計算し，結果が一致することを確かめよ．(a) そのまま (x,y) に関する局所座標表示を用いて計算する．(b) ω を (r,θ) に関して局所座標表示し，その表示を用いて計算する．

25.　$\omega\in\Omega^k(M)$，$\eta\in\Omega^l(M)$ とする．

(1)　ω，η がともに閉形式ならば，$\omega\wedge\eta$ も閉形式であることを示せ．

(2)　ω，η がともに完全形式ならば，$\omega\wedge\eta$ も完全形式であることを示せ．

(3)　ω，η のうち一方が完全形式，もう一方も（完全形式とは限らないが）閉形式であるとき，$\omega\wedge\eta$ は完全形式であるといえるか．

26.　3 次元多様体 M において，微分 1 形式 $\theta\in\Omega^1(M)$ が**接触形式**（contact form）であるとは，$\eta = \theta\wedge d\theta\in\Omega^3(M)$ が nowhere vanishing である*ことをいう．θ を接触形式，f を nowhere vanishing な関数とするとき，$\hat{\theta} = f\theta$ も接触形式であることを示せ．

次の問題で用いる対応 $(x,y,z,w)\longmapsto(u,v,t)$ および $(x,y,z,w)\longmapsto(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{t})$ は立体射影の亜種である†．

27.　3 次元球面 $S^3 = \{\boldsymbol{x} = (x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 \mid |\boldsymbol{x}|^2 = 1\}$ を考える．$U = S^3\setminus\{(0,0,1,0)\}$，$\tilde{U} = S^3\setminus\{(0,0,-1,0)\}$ とおき，これらの開集合に，それぞれ次のようにして局所座標系 (u,v,t)，$(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{t})$ を定める：

$$u = \frac{x(1-z)-yw}{(1-z)^2+w^2},\qquad v = \frac{y(1-z)+xw}{(1-z)^2+w^2},\qquad t = \frac{-2w}{(1-z)^2+w^2},$$
$$\tilde{u} = \frac{x(1+z)+yw}{(1+z)^2+w^2},\qquad \tilde{v} = \frac{y(1+z)-xw}{(1+z)^2+w^2},\qquad \tilde{t} = \frac{2w}{(1+z)^2+w^2}.$$

局所座標系 (u,v,t) は U から $\mathbb{R}^3$ への同相写像を与えている．$(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{t})$ についても同様．

S^3 上の微分 1 形式 θ を，上記のチャートに関する局所座標表示によって

$$\theta|_U = \frac{dt + 2(u\,dv - v\,du)}{(1+u^2+v^2)^2+t^2},\qquad \theta|_{\tilde{U}} = \frac{d\tilde{t} + 2(\tilde{u}\,d\tilde{v} - \tilde{v}\,d\tilde{u})}{(1+\tilde{u}^2+\tilde{v}^2)^2+\tilde{t}^2}$$

と定義する．θ が接触形式であることを示せ．

---

*任意の点 $p\in M$ において $\eta_p\neq 0$ をみたすという意味．

†正確に言うと，Cayley 変換を用いて $S^3\setminus\{1\text{ 点}\}$ を Siegel 上半空間 $D = \{(z,w)\in\mathbb{C}^2 \mid \operatorname{Im} w > |z|^2\}$ の $\mathbb{C}^2$ における境界 ∂D に写し，さらに ∂D を Heisenberg 群（とよばれる Lie 群）へと写している．たとえば D. Jerison & J. M. Lee, The Yamabe problem on CR manifolds, *J. Differential Geom.* **25** (1987), 167–197 の 176 ページ付近を見よ．

次の問題は L. W. Tu『トゥー　多様体』（裳華房）の第 19 節からとった．Maxwell の法則をみたす真空中の電磁場は，時空 $\mathbb{R}^4$ の閉微分 2 形式 F とみなせる．Poincaré の補題によって $F = dA$ をみたす微分 1 形式 A が存在する（電磁ポテンシャル）．A は時空という 4 次元多様体上の主 $U(1)$ 束の接続形式（の局所自明化）と解釈され，その見方のもとでは $F = F_A$ は曲率形式である．$F = dA$ をみたす A の選び方には自由度があるが，それは主 $U(1)$ 束のゲージ変換によって引き起こされる自由度なのだと理解される（「ゲージ変換」という語をこのように使うのは数学での言葉遣いであって，物理では電磁ポテンシャル A の取りかえ自体をゲージ変換というのだと思う）*.

28.　真空 $\mathbb{R}^3$ における時間変化する電場 $\boldsymbol{E} = (E_1, E_2, E_3)$，磁場 $\boldsymbol{B} = (B_1, B_2, B_3)$ を考える（E_1，E_2，E_3 および B_1，B_2，B_3 はいずれも 4 変数 x，y，z，t の関数）．電磁気学の基本法則である Maxwell の法則は

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{E} = 0, \qquad \operatorname{rot}\boldsymbol{B} = \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0$$

によって与えられる．

上記の $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$ をそれぞれ次の微分 1 形式 E，微分 2 形式 B と同一視する：

$$E = E_1\,dx + E_2\,dy + E_3\,dz, \qquad B = B_1\,dy \wedge dz + B_2\,dz \wedge dx + B_3\,dx \wedge dy.$$

これらを座標系 (x, y, z, t) をもつ時空 $\mathbb{R}^4$ の微分形式とみなす．$F = E \wedge dt + B$ とおく（電磁場テンソルもしくは Faraday テンソル）．Maxwell の方程式のうちどの 2 つが条件 $dF = 0$ と同値であるか決定し，同値であることを説明せよ．

最後に，講義の系 5.4 で述べた多様体上の外微分作用素 d の性質が，実は d の特徴づけを与えることにふれておこう（したがってこれを d の定義とすることも可能である）．下記の一意性の主張は補題 5.3 によく似ているが，補題 5.3 では「局所座標系が存在するような開集合 U において」という前提があったことに注意してほしい．今度は M 全体で定義された局所座標系が存在することを仮定していない．そこが異なる点である．

証明には 1 の分割を駆使する必要があり，そう簡単ではない．しかし現段階で出題するだけはしておくことにした．

29.　多様体 M において，次の条件 (i)，(ii)，(iii) が成り立つように各 $k \geqq 0$ に対して線型写像 $D^{(k)}\colon \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ を与える仕方は（存在すれば）一意的であることを示せ．なお，以下では $D^{(k)}$ ではなく単に D と書く．

(i)　関数（微分 0 形式）f に対して，Df は問題 15 で定義した f の全微分 df.

(ii)　$\omega \in \Omega^k(M)$ と $\eta \in \Omega^l(M)$ に対して $D(\omega \wedge \eta) = D\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge D\eta$.

(iii)　$D^2 = 0$.

---

*中原幹夫『理論物理学のための幾何学とトポロジー II［原著第 2 版］』（日本評論社）第 10 章，茂木勇・伊藤光弘『微分幾何学とゲージ理論』（共立出版）第 4 章（とくに 112 ページから始まる例 1）などを見よ．