3　多様体上の微分形式 (1)

多様体 M の接ベクトルの（一つの）定義は次のように与えられる（松本幸夫『多様体の基礎』でいうところの「方向微分」）．点 $p \in M$ における接ベクトル v とは，p の開近傍で定義された C^∞ 級関数 f に対して $v(f) \in \mathbb{R}$ を定めるような対応であって，

$$v(f+g) = v(f) + v(g), \qquad v(cf) = cv(f) \quad (c \in \mathbb{R}), \qquad v(fg) = g(p)v(f) + f(p)v(g)$$

をみたすようなもののことである．

ところで，上記の条件の初めの 2 式をさして「v は線型写像である」と言いたいが，そうは言いがたい．「p の開近傍で定義された C^∞ 級関数」の全体は，そのままではベクトル空間とはみなせないからである．この問題を解決するための定義を紹介しておきたい．

13.　多様体 M の点 p に対し，p の開近傍 U と C^∞ 級関数 $f \in C^\infty(U)$ の組 (U, f) すべてからなる集合を S_p とする．S_p に次のような関係 $\sim$ を導入する：

$$(U, f) \sim (U', f') \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \text{点 } p \text{ のある開近傍 } V \subset U \cap U' \text{ が存在して } f|_V = f'|_V.$$

(1)　$\sim$ が同値関係であることを示せ．

(2)　商集合 $C_p^\infty = S_p/\!\sim$ を考える（C_p^∞ の元を C^∞ 級関数の点 p における**芽**という）．C_p^∞ は自然にベクトル空間とみなすことができる．加法およびスカラー倍を定義し，それらが well-defined であることを説明せよ．

(3)　接ベクトル $v \in T_pM$ を，C_p^∞ を定義域とする線型写像 $C_p^\infty \to \mathbb{R}$ とみなすことができる．具体的には，与えられた $s \in C_p^\infty$ について，s の代表元 (U, f) を任意に選び $v(s) = v(f)$ と定めると，写像 $v \colon C_p^\infty \to \mathbb{R}$ は well-defined で，さらに線型である．そのことを確かめよ．

14.　V を n 次元実ベクトル空間とし，V^* をその双対空間とする．

(1)　v_1，v_2，……，v_n を V の基底とし，α^1，α^2，……，α^n を双対基底とする．α^1，α^2，……，α^n の定義を説明し，これらが実際に V^* の基底を与えることを示せ．

(2)　v_1，v_2，……，v_n とは別の基底 $\tilde{v}_1$，$\tilde{v}_2$，……，$\tilde{v}_n$ が与えられたとして，基底の取りかえの行列を $P = (p_{ij})$ とする．すなわち

$$\tilde{v}_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} v_i.$$

そのとき，$\tilde{v}_1$，$\tilde{v}_2$，……，$\tilde{v}_n$ の双対基底 $\tilde{\alpha}^1$，$\tilde{\alpha}^2$，……，$\tilde{\alpha}^n$ は α^1，α^2，……，α^n を用いてどのようにあらわすことができるか説明せよ．

15.　多様体 M で定義された（C^∞ 級の）関数 f に対し

$$(df)_p(v) = v(f) \qquad (v \in T_pM)$$

によって $(df)_p \in T_p^*M$ を定め，$df = \{(df)_p\}_{p \in M}$ とおく（問題 4 で定義した df の一般化．本問の df も f の**微分**ないし**全微分**という）．M のチャート $(U; x^1, \dots, x^n)$ における局所座標表示が

$$(df)|_U = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\, dx^i$$

で与えられることを示せ（この局所座標表示から，とくに df が C^∞ 級の微分 1 形式であることもわかる）．

16.　多様体 M 上の微分 1 形式 ω に対し，曲線 $\gamma\colon [a,b] \to M$ に沿った ω の線積分を

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega_{\gamma(t)}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right) dt$$

で定義する（$\dfrac{d\gamma}{dt}$ は γ の時刻 t における速度ベクトルで，$T_{\gamma(t)}M$ に属する）．$\omega = df$ のときは

$$\int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

であることを示せ（問題 4 の一般化）．

17.　$\mathbb{R}^3$ の単位球面 $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ を考える．$f(x,y,z) = z$ とおく（$\mathbb{R}^3$ 上の関数とも思えるが，ここでは S^2 上の関数とみなす）．$\omega = df$ によって S^2 上の微分 1 形式 ω を定義する．

S^2 において，$U = S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ とし，

$$u = \frac{x}{1-z}, \qquad v = \frac{y}{1-z}$$

とおく（北極 $(0,0,1)$ に関する立体射影）ことによってチャート $(U; u, v)$ を定める．このチャートを用いて $\omega|_U$ すなわち $(df)|_U$ を局所座標表示せよ．

18.　前問に引き続き $\mathbb{R}^3$ の単位球面 S^2 を考える．前問のチャート $(U; u, v)$ において

$$\eta = \frac{-v\, du + u\, dv}{(1 + u^2 + v^2)^2}$$

で与えられる（U 上の）微分 1 形式 η を考える．S^2 で定義された微分 1 形式 ω であって $\omega|_U = \eta$ となるようなものが存在するかどうか判定せよ．