12　微分形式の積分 (2)

61.　M は多様体，C は M に埋めこまれた部分多様体で，微分同相写像 $F\colon S^1 \to C$ が与えられているとする（つまり，C はいわば“M に埋めこまれた円周 S^1”である）．曲線 $\gamma\colon [0, 2\pi] \to M$ を $\gamma(t) = F(\cos t, \sin t)$ により定める．そのとき，M の任意の微分 1 形式 ω に対し

$$\int_C \omega = \int_\gamma \omega$$

であることを示せ（右辺は問題 16 で定義した線積分）．ただし，C には S^1 の標準的な向きに対応する向きを与える．

62.　問題 58 を Stokes の定理を用いて解け．［おわび：問題 58 では $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ において $\omega = x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy$ という微分形式を考えると書きましたが，この ω は $\mathbb{R}^3$ 全体で問題なく定義されていることに注意してください．］

63.　M を向きづけられた n 次元閉多様体*，N を任意の多様体として，$\omega \in \Omega^n(N)$ を閉微分 n 形式とする．F，G を互いに C^∞ ホモトピックな M から N への 2 つの写像とするとき，

$$\int_M F^*\omega = \int_M G^*\omega$$

であることを示せ．［ヒント：F と G のあいだの C^∞ ホモトピー $\Phi\colon M \times [0, 1] \to N$ をとり，$M \times [0, 1]$ という境界つき多様体上で $d(\Phi^*\omega)$ を積分する．または，向きづけられた n 次元閉多様体 M について

$$H^n_{\mathrm{dR}}(M) \to \mathbb{R}, \qquad [\omega] \longmapsto \int_M \omega$$

が well-defined な線形写像を与えることを示し，講義の定理 7.1 と組み合わせる．］

問題 63 の結果において $M = S^1$ とすれば（さらに問題 61 も念頭におくと），閉微分 1 形式の閉曲線に沿った線積分の C^∞ ホモトピー不変性が得られる．これは問題 11（の多様体版）の閉曲線版といえる．問題 11（の多様体版）そのものは，問題 63 のヒントに挙げた 2 つの方針のうち前者を真似ることにして，「角つき多様体に関する Stokes の定理」[†]を利用すれば証明できる．詳細は各自の検討に任せる．

---

*境界をもたないコンパクト多様体のことを，しばしば一言で**閉多様体**（closed manifold）とよぶ．

†J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer の Theorem 16.25.

M を向きづけ可能な連結 n 次元閉多様体とすれば $H^n_{\mathrm{dR}}(M) \cong \mathbb{R}$ である（Poincaré 双対性の特別な場合．問題 54 の直前の注意でもふれた）．したがって，任意の（C^∞ 級）写像 $F\colon M \to M$ に対し，線形写像 $F^*\colon H^n_{\mathrm{dR}}(M) \to H^n_{\mathrm{dR}}(M)$ は与えられた $H^n_{\mathrm{dR}}(M)$ の元を定数倍する写像にすぎない．その倍率のことを F の**写像度**といい $\deg(F)$ で表す．実は $\deg(F)$ は整数である．次元の等しい 2 つの向きづけ可能な連結閉多様体 M，N のあいだの写像 $F\colon M \to N$ についても写像度を定義できるが，ここでは扱わない．

64. $S^1 \subset \mathbb{C}$ とみて，$F_k\colon S^1 \to S^1$ を $z \longmapsto z^k$ により定める．F_k の写像度を求めよ．［ヒント：問題 35 の α を使って計算できる．］

65. S^2 を Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ と同一視し，$F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，$F(z) = z^2$ を連続に拡張することで $F\colon S^2 \to S^2$ を定義する．F の写像度を求めよ．［ヒント：結論は 2．直観的には，定義域が F を通じて終域をだいたい 2 重に覆うからである．積分を使うのがいいと思う．］

次の問題の (3) はハードな計算を要する．何時間，あるいは何日かかったとしても完遂できたら自信をもってよい．（$\mathbb{CP}^1$ の Fubini–Study 形式について知っていれば計算はだいぶ見通しがよくなる．）

66. $i\colon S^2 \to \mathbb{R}^3$ を包含写像として

$$\omega = \frac{1}{4\pi} \cdot i^*(x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy)$$

とおく（係数 $1/4\pi$ は積分が 1 となるようにつけた）．任意の写像 $F\colon S^3 \to S^2$ に対し，$F^*\omega$ は S^3 上の閉 2 形式だから，$H^2_{\mathrm{dR}}(S^3) = 0$ とあわせると，$F^*\omega = d\eta$ をみたす $\eta \in \Omega^1(S^3)$ が存在することがわかる．（η は一意的ではない．）

(1) $H(F) = \displaystyle\int_{S^3} \eta \wedge d\eta$ の値が η の選び方に依存しないことを示せ（**Hopf 不変量**）．

(2) 2 つの写像 F，$G\colon S^3 \to S^2$ が互いに C^∞ ホモトピックならば $H(F) = H(G)$ であることを示せ．［ヒント：両者のあいだの C^∞ ホモトピー $\Phi\colon S^3 \times [0,1] \to S^2$ をとる．Φ を C^∞ 級写像 $S^3 \times \mathbb{R} \to S^2$ に拡張しておき，$\Phi^*\omega = d\tilde{\eta}$ と表す．ここで写像 $\iota_t\colon S^3 \to S^3 \times \mathbb{R}$，$p \longmapsto (p,t)$ を考えると，$F^*\omega = d\iota_0^*\tilde{\eta}$，$G^*\omega = d\iota_1^*\tilde{\eta}$ である．Stokes の定理を用いて $H(G) - H(F)$ を $S^3 \times [0,1]$ における積分として表せ．］

(3) S^3 を $\mathbb{C}^2$ の単位球面とみなして，自然な射影 $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{CP}^1$ を S^3 に制限したものを F_1 と書く．$\mathbb{CP}^1$ を S^2 と同一視すれば $F_1\colon S^3 \to S^2$ である（**Hopf 写像**）．適当にとった同一視のもとで，F_1 は具体的には

$$F_1(x,y,z,w) = (2(xz + yw), 2(yz - xw), z^2 + w^2 - x^2 - y^2)$$

で与えられる（S^3 を $\mathbb{R}^4$ の部分集合とみて，$\mathbb{R}^4$ の標準座標を用いて書いたのが上の式）．$H(F_1)$ の値を求め，F_1 が定値写像に C^∞ ホモトピックではないことを示せ．

通常の（連続写像を用いて定義する）ホモトピーがもし存在すれば，修正して C^∞ ホモトピーにできる．よって F_1 は定値写像にホモトピックでもない．とくに $\pi_3(S^2)$ は自明でない．実は $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$ である．