10　Mayer–Vietoris 完全列 (3)

コチェイン複体の短完全列 $0 \to \mathcal{A} \xrightarrow{f} \mathcal{B} \xrightarrow{g} \mathcal{C} \to 0$ が誘導するコホモロジーの長完全列

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^{k-1}(\mathcal{B}) \arrow[r, "g^\sharp_{k-1}"] & H^{k-1}(\mathcal{C}) \arrow[dll, "\delta_{k-1}"] \\
H^k(\mathcal{A}) \arrow[r, "f^\sharp_k"] & H^k(\mathcal{B}) \arrow[r, "g^\sharp_k"] & H^k(\mathcal{C}) \arrow[dll, "\delta_k"] \\
H^{k+1}(\mathcal{A}) \arrow[r, "f^\sharp_{k+1}"] & H^{k+1}(\mathcal{B}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

を考える．$H^k(\mathcal{A})$ における完全性は次のような diagram chasing によって示される．（コチェイン複体 $\mathcal{A}$ を構成するベクトル空間を A^k（ただし $k \in \mathbb{Z}$）と書き，線形写像 $A^k \to A^{k+1}$ は $d^{(k)}_{\mathcal{A}}$ などと書かずに単に d であらわす．$\mathcal{B}$，$\mathcal{C}$ についても同様.）

〈$\operatorname{Im}\delta_{k-1} \subset \operatorname{Ker} f^\sharp_k$ の証明〉任意に $[\alpha] \in \operatorname{Im}\delta_{k-1}$ をとる．Im の定義により $[\alpha] = \delta_{k-1}([\gamma])$ とあらわせる．ただし $\gamma \in C^{k-1}$ は $d\gamma = 0$ をみたす．

ここで δ_{k-1} の定義を思い出す．$g_{k-1}(\beta) = \gamma$ となる $\beta \in B^{k-1}$ をとり，さらに $f_k(\alpha') = d\beta$ をみたす $\alpha' \in A^k$ をとる．自動的に $d\alpha' = 0$ であることに注意して，$\delta_{k-1}([\gamma]) = [\alpha']$ と定めるのだった．前段落では $[\alpha] = \delta_{k-1}([\gamma])$ としたのだから，$[\alpha] = [\alpha']$ である．

したがって

$$f^\sharp_k([\alpha]) = f^\sharp_k([\alpha']) = [f_k(\alpha')] = [d\beta] = 0.$$

すなわち $[\alpha] \in \operatorname{Ker} f^\sharp_k$ である．

〈$\operatorname{Ker} f^\sharp_k \subset \operatorname{Im}\delta_{k-1}$ の証明〉任意に $[\alpha] \in \operatorname{Ker} f^\sharp_k$ をとる．すると $f^\sharp_k([\alpha]) = 0$ つまり $[f_k(\alpha)] = 0$ である．ゆえに $f_k(\alpha) = d\beta$ をみたす $\beta \in B^{k-1}$ が存在する．そのような β を任意に一つとり，$\gamma = g_{k-1}(\beta)$ とおく．すると

$$d\gamma = d(g_{k-1}(\beta)) = g_k(d\beta) = g_k(f_k(\alpha)) = 0$$

である．

$d\gamma = 0$ であることから $[\gamma]$ が定義される．これについて $\delta_{k-1}([\gamma])$ は何か，定義にしたがって順番に考えてみると，$g_{k-1}(\beta) = \gamma$，$f_k(\alpha) = d\beta$ より $\delta_{k-1}([\gamma]) = [\alpha]$ である．したがってとくに $[\alpha] \in \operatorname{Im}\delta_{k-1}$ であることがわかった．

51.　上記の長完全列の $H^k(\mathcal{B})$ における完全性を示せ．

52.　上記の長完全列の $H^k(\mathcal{C})$ における完全性を示せ．［ヒント：しばらく考えてわからなければ，L. W. Tu『トゥー　多様体』（裳華房）定理 25.6 の後の説明をみよ.］

53. 多様体 M 上の微分形式 ω について，その**台** $\operatorname{supp}\omega$ とは $\{p \in M \mid \omega_p \neq 0\}$ の M における閉包のことである．

コンパクトな台をもつすべての微分 k 形式からなるベクトル空間を $\Omega_c^k(M)$ で表す．外微分作用素 d は $\Omega_c^k(M)$ を $\Omega_c^{k+1}(M)$ の中に写す*．コチェイン複体

$$\cdots \xrightarrow{d} \Omega_c^{k-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega_c^k(M) \xrightarrow{d} \Omega_c^{k+1}(M) \xrightarrow{d} \cdots$$

のコホモロジー群 $H^k_{\mathrm{dR},c}(M)$ を，M の**コンパクト台をもつ de Rham コホモロジー群**という（M がコンパクトなら普通の $H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ と同じもの）．

さて，M の開集合 W，$\tilde{W}$ のあいだに包含関係 $W \subset \tilde{W}$ があるとき，$\omega \in \Omega_c(W)$ は，W の外の各点における値を 0 と定めることで $\tilde{\omega} \in \Omega_c(\tilde{W})$ へと拡張できる．この「ゼロ拡張」を与える線形写像を $z_W^{\tilde{W}}\colon \Omega_c(W) \to \Omega_c(\tilde{W})$ であらわす．そのとき，

$$\begin{aligned} f_k\colon \Omega_c^k(U \cap V) &\to \Omega_c^k(U) \oplus \Omega_c^k(V), & \alpha &\longmapsto (z^U_{U\cap V}(\alpha), -z^V_{U\cap V}(\alpha)),\\ g_k\colon \Omega_c^k(U) \oplus \Omega_c^k(V) &\to \Omega_c^k(M), & (\beta_1,\beta_2) &\longmapsto z_U^M(\beta_1) + z_V^M(\beta_2) \end{aligned}$$

とおけば，

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ & & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d & & \\ 0 & \longrightarrow & \Omega_c^k(U\cap V) & \xrightarrow{f_k} & \Omega_c^k(U)\oplus\Omega_c^k(V) & \xrightarrow{g_k} & \Omega_c^k(M) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d & & \\ 0 & \longrightarrow & \Omega_c^{k+1}(U\cap V) & \xrightarrow{f_{k+1}} & \Omega_c^{k+1}(U)\oplus\Omega_c^{k+1}(V) & \xrightarrow{g_{k+1}} & \Omega_c^{k+1}(M) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \end{array}$$

がコチェイン複体の短完全列となることを示せ．

問題 53 でえられた短完全列に定理 10.1 を適用して $H^k_{\mathrm{dR},c}$ に関する Mayer–Vietoris 完全列をえる．これは具体的な計算に役立つほか，たとえば「Poincaré 双対性」の証明にも用いられる†．

次の問題では，Poincaré 双対性の特別な場合にあたる「連結かつコンパクトな n 次元多様体 M について，さらに M が向きづけ可能ならば $H^n_{\mathrm{dR}}(M) \cong \mathbb{R}$ である」という事実を使う（向きづけ可能性の定義は次回与える）‡．3 次元実射影空間 $\mathbb{RP}^3$ は向きづけ可能なので，$H^3_{\mathrm{dR}}(\mathbb{RP}^3) \cong \mathbb{R}$ である．

54. $H^k_{\mathrm{dR}}(\mathbb{RP}^3)$ を $0 \leqq k \leqq 3$ について求めよ．ただし $H^3_{\mathrm{dR}}(\mathbb{RP}^3) \cong \mathbb{R}$ は既知としてよい．
［ヒント：問題 46 と同様の開集合 U，V に関する Mayer–Vietoris 完全列を用いる.］

---

*なぜなら $\operatorname{supp} d\omega \subset \operatorname{supp}\omega$ だから．

†R. Bott & L. W. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*, Springer の第 5 節をみよ．

‡同じ前提のもとで，M が向きづけ可能でなければ $H^n_{\mathrm{dR}}(M) = 0$.