中間レポート1 解答

問題 1. 次の問いに答えよ. ただし m を 1 以上の整数とする.

(1) 位相空間 M がハウスドルフであることの定義を述べよ.

(2) M をハウスドルフ空間とする. M のチャート (局所座標近傍) と C^∞ 級アトラス (局所座標近傍系) の定義を述べよ. [1]

(答)

(1). 位相空間 M がハウスドルフであるとは, 任意の $x, y \in M$ で $x \neq y$ ならば, ある M の開集合 U, V で $x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \varnothing$ となるものが存在すること.

(2). 多様体の基礎 定義 6.I, 6.IV 参照.

[チャート (局所座標近傍)] M の開集合 U から，m 次元実数空間 $\mathbb{R}^m$ のある開集合 V への同相写像

$$\varphi : U \to V$$

があるとき，U と φ の対 (U, φ) を m 次元座標近傍という.

[C^∞ 級アトラス (局所座標近傍系)] M の C^∞ 級アトラスとは，$\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ という族であって，（ある非負整数 m について）次の性質をみたすようなもののことである．

(i) $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は M の開被覆である．（つまり，各 U_λ は M の開集合で $\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda = M$．）

(ii) 各 φ_λ は U_λ から $\mathbb{R}^m$ の開集合 V_λ への同相写像である．

(iii) $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$ をみたす任意の $\lambda, \mu \in \Lambda$ に対して，

$$\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1} : \varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu) \longrightarrow \varphi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$$

は C^∞ 級写像である．

問題 2. 次の問いに答えよ. ただし m を 1 以上の整数, M を C^∞ 級 m 次元多様体, $p \in M$ とする.

(1) 接ベクトル空間 T_pM の定義を述べよ. なお”多様体の基礎”では複数の定義の仕方があるが, どれを答えても正解とする.

(2) 余接ベクトル空間 T_p^*M の定義を述べよ. ただしその際に”ベクトル空間の双対空間”の定義もきちんと述べること.

(3) 多様体上の C^∞ 級微分形式とは何か. 定義を説明せよ. [2]

(1). 多様体の基礎 8 章参照. 答えは 2 つ以上ある.[3]

[1 つ目 方向微分を使った特徴づけ]

点 $p \in M$ における方向微分 v とは，p の開近傍で定義された C^∞ 級関数 f に実数 $v(f)$ を対応させる操作であって， 次の (0)(1)(2) の性質をもつものである．

(0) f と g が点 p の十分小さな開近傍上で一致すれば，$v(f) = v(g)$．

---

[1] この問題は松本先生の試験問題で実際に出た問題. http://www4.math.sci.osaka-u.ac.jp/~matsumoto/courses/2023-g1/

[2] この問題は松本先生の中間レポートにあった問題.

[3] 本当は曲線に関する微分を入れるべきだが省略した．

(1) $v(af+bg)=av(f)+bv(g)$． ここで $a,b\in\mathbb{R}$ であり，f,g は p の開近傍で定義された任意の C^∞ 級関数．

(2) $v(fg)=v(f)g(p)+f(p)v(g)$．

接ベクトル空間 T_pM を, 点 $p\in M$ における方向微分 v からなる集合とする. (これは $\mathbb{R}$ ベクトル空間の構造を持つ.)

[2 つ目 座標を使った特徴づけ]

点 $p\in M$ について, 座標近傍 (U,φ) で $p\in U$ となるものを一つとる. すると $\varphi(U)\subset\mathbb{R}^m$ なので

$$\varphi(p)=(x_1,x_2,\ldots,x_m)$$

と書ける. この $(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ を (U,φ) に関する p の局所座標という．

p を含む座標近傍 $(U;x_1,x_2,\ldots,x_m)$ について, p のまわりで定義された C^∞ 級関数 f に，p における x_i 方向の偏微分係数

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\in\mathbf{R}$$

を対応させる操作を $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ とする. この m 個のベクトル $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right)_p,\left(\dfrac{\partial}{\partial x_2}\right)_p,\ldots,\left(\dfrac{\partial}{\partial x_m}\right)_p$ の張る $\mathbb{R}$ ベクトル空間を, 点 p における M の接ベクトル空間という.

(注意) 実は C^r 級多様体について, $r\neq\infty$ ならば 1 つ目の定義と 2 つ目の定義は一致しない. (多様体の基礎 付録 A 参照) よって 2 つ目の定義が正しいものである. C^∞ 級多様体に関しては 1 つ目の定義と 2 つ目の定義は一致するので, どちらを答えても良い.

(2). 多様体の基礎 18 章参照.

(答). $\mathbb{R}$ 上の m 次元ベクトル空間 V について, その双対空間 V^* を V から $\mathbb{R}$ への線型写像 $\omega:V\to\mathbb{R}$ のなす集合とする. この空間 V^* もまた $\mathbb{R}$ ベクトル空間になる.

$T_p(M)$ の双対空間 $T_p(M)^*$ のことを， 多様体 M の点 p における余接ベクトル空間とよび，$T_p^*(M)$ と表わす．

(3). 松本先生の過去の中間レポートの答え参照.

(答). M を多様体とする．M 上の C^∞ 級微分 0 形式とは 単なる C^∞ 関数 $M\to\mathbb{R}$ のこととする. 以下 $k\geq 1$ について C^∞ 級微分 k 形式を定義する．

任意の $p\in M$ に対し， 接ベクトル空間 T_pM 上の交代的な k 重線形形式全体のなす空間を $\bigwedge^k T_p^*M$ と書く．微分 k 形式とは, 写像

$$\omega:M\longrightarrow\prod_{p\in M}T_p^*M$$

であって， 任意の $p\in M$ に対し，$\omega(p)$ が T_p^*M の元になっているようなもののことである．(以下 $\omega(p)$ を ω_p と書く.)

微分 k 形式 ω が C^∞ 級であることを以下のように定義する. M のチャート $(U;x^1,\ldots,x^n)$ について, 局所座標を用いて U 上で ω を

$$\omega|_U=\sum_{i_1<\cdots<i_k}f_{i_1\cdots i_k}\,dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$$

という形に一意的に表すことができる．任意のチャート $(U; x^1, \dots, x^n)$ に対し，この表示に現れるすべての関数 $f_{i_1\cdots i_k}$ が U 上で, C^∞ 級であるとき，ω は C^∞ 級であると言う．

問題 3. $S^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2+z^2=1\}$ とおく．次の問いに答えよ．ただし $\mathbb{R}^3$ にはユークリッド位相を入れて, S^2 には $\mathbb{R}^3$ の相対位相を入れる.

(1) S^2 がハウスドルフであることを示せ.

(2) S^2 の C^∞ 級アトラス (局所座標近傍系)$\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ を具体的に構成せよ．[4]

(答).

(1). $\mathbb{R}^3$ は距離空間なのでハウスドルフ．また $S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ は連続単射である．よって S^2 はハウスドルフである．

(補足) 空でない位相空間の連続な単射 $f: X \to Y$ について, Y がハウスドルフならば X もハウスドルフである.

[証明.] $a, b \in X$ かつ $a \neq b$ とする．f は単射なので $f(a) \neq f(b)$．Y はハウスドルフなので Y の開集合 U, V で $f(a) \in U$, $f(b) \in V$, $U \cap V = \varnothing$ となるものがある．f は連続なので $f^{-1}(U), f^{-1}(V)$ は X の開集合であり $a \in f^{-1}(U)$, $b \in f^{-1}(V)$, $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \varnothing$ となる．よって X はハウスドルフ. □

(2). 答えは二つある．多様体の基礎 6 章の例 2,4 参照.

[2 枚のチャート]

- $U_N := S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ とし

$$\varphi_N : U_N \to \mathbb{R}^2 \quad \varphi_N(x,y,z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right)$$

  とする．(感じとしては, 北極 $(0,0,1)$ から xy 平面へのステレオ投影) また $\varphi_N : U_N \to \varphi_N(U_N)$ は同相写像になる．これは φ_N の逆写像が

$$\varphi_N^{-1} : \varphi_N(U_N) \to U_N \quad (u,v) \mapsto \left(\frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \frac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2}\right)$$

  という連続写像で与えられるからである.

- $U_S := S^2 \setminus \{(0,0,-1)\}$ とし,

$$\varphi_S : U_S \to \mathbb{R}^2 \quad \varphi_S(x,y,z) = \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z}\right)$$

  とする．(感じとしては, 南極 $(0,0,1)$ から xy 平面へのステレオ投影) 上と同様に $\varphi_S : U_S D \to \varphi_N(U_N)$ は同相写像になる.

$\{(U_N, \varphi_N), (U_S, \varphi_S)\}$ は C^∞ 級アトラスになる．これはアトラスの条件を示していけば良い.

(i) $S^2 = U_N \cup U_S$ である.

(ii) 上に述べた通り.

[4] 基本的には 2 枚か 6 枚の（局所）座標近傍 (チャート) で S^2 を覆うものがあるが, どちらを答えてもよい.

(iii) $U_N \cap U_S$ について

$$\varphi_S \circ \varphi_N^{-1} : \varphi_N(U_N \cap U_S) \longrightarrow \varphi_S(U_N \cap U_S)$$

を計算する．$(u,v) \in \varphi_N(U_N \cap U_S) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ について，

$$\varphi_S \circ \varphi_N^{-1}(u,v) = \varphi_S\left(\frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \frac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2}\right) = \left(\frac{u}{u^2+v^2}, \frac{v}{u^2+v^2}\right)$$

となる．$(u,v) \neq (0,0)$ なので $\varphi_S \circ \varphi_N^{-1}$ は $\varphi_N(U_N \cap U_S)$ 上で C^∞ 級である．$\varphi_N \circ \varphi_S^{-1}$ も同様である．

[6 枚のチャート]

- $U_x^+ = \{(x,y,z) \in S^2 \mid x > 0\}, U_x^- = \{(x,y,z) \in S^2 \mid x < 0\}$ とし，

$$\varphi_x^+ : U_x^+ \longrightarrow \varphi_x^+(U_x^+) \subset \mathbb{R}^2, \qquad (x,y,z) \longmapsto (y,z)$$

$$\varphi_x^- : U_x^- \longrightarrow \varphi_x^-(U_x^-) \subset \mathbb{R}^2 \qquad (x,y,z) \longmapsto (y,z)$$

  とする．これら $\varphi_x^+ : U_x^+ \longrightarrow \varphi_x^+(U_x^+)$ は同相写像になる．これは φ_x^+ の逆写像が

$$\varphi_x^{+-1} : \varphi_x^+(U_x^+) \to U_x^+ \quad (u,v) \mapsto (\sqrt{1-u^2-v^2}, u, v)$$

  という連続写像で与えられるからである．φ_x^- も同じ．

- $U_y^+ = \{(x,y,z) \in S^2 \mid y > 0\}, U_y^- = \{(x,y,z) \in S^2 \mid y < 0\}$ とし，

$$\varphi_y^+ : U_y^+ \longrightarrow \varphi_y^+(U_y^+) \subset \mathbb{R}^2, \qquad (x,y,z) \longmapsto (x,z)$$

$$\varphi_y^- : U_y^- \longrightarrow \varphi_y^-(U_y^-) \subset \mathbb{R}^2, \qquad (x,y,z) \longmapsto (x,z)$$

  とする．これらは上と同じく同相写像になる．

- $U_z^+ = \{(x,y,z) \in S^2 \mid z > 0\}, U_z^- = \{(x,y,z) \in S^2 \mid z < 0\}$ とし

$$\varphi_z^+ : U_z^+ \longrightarrow \varphi_z^+(U_z^+) \subset \mathbb{R}^2 \qquad (x,y,z) \longmapsto (x,y)$$

$$\varphi_z^- : U_z^- \longrightarrow \varphi_z^-(U_z^-) \subset \mathbb{R}^2, \qquad (x,y,z) \longmapsto (x,y)$$

  とする．これらは上と同じく同相写像になる．

上の 6 つを合わせた $\{(U_x^+, \varphi_x^+), \ldots, (U_z^-, \varphi_z^-)\}$ が C^∞ アトラスになる．これはアトラスの条件を示していけば良い．

(i) $S^2 = U_x^+ \cup \cdots \cup U_z^-$ である．これは任意の $(x,y,z) \in S^2$ について $x = y = z = 0$ となることはない．例えば $x \neq 0$ とすると，$(x,y,z) \in U_x^+ \cup U_x^-$ となる．$y \neq 0, z \neq 0$ の場合も同様．

(ii) 上に述べた通り．

(iii) $U_x^+ \cap U_y^+$ について

$$\varphi_y^+ \circ \varphi_x^{+-1} : \varphi_x^+(U_x^+ \cap U_y^+) \to \varphi_y^+(U_x^+ \cap U_y^+)$$

を計算する．$(u,v) \in \varphi_x^+(U_x^+ \cap U_y^+) = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2+t^2<1, s>0\}$ について,

$$\varphi_y^+ \circ {\varphi_x^+}^{-1}(u,v) = \varphi_y^+(\sqrt{1-u^2-v^2}, u, v) = (\sqrt{1-u^2-v^2}, v)$$

となる．$1-u^2-v^2>0$ なので $\varphi_y^+ \circ {\varphi_x^+}^{-1}$ は $\varphi_x^+(U_x^+ \cap U_y^+)$ 上で C^∞ 級である．他も同様．[5]

問題 4. 次の計算をせよ．

(1) $(xdx+ydy) \wedge (-ydx+xdy)$ を求めよ．
(2) $(xdx+ydy) \wedge (ydy+zdz) \wedge (xdx+zdz)$ を求めよ．
(3) $f(x,y,z) = \log\bigl(x^2+y^2+z^2\bigr)$ について, df を求めよ．
(4) $\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$ について, $d\omega$ を求めよ．
(5) $\varphi(x,y) = (x^m, y^n)$ とし, $\eta = \frac{1}{x}dx + dy$ とする．$\varphi^*\eta$ を求めよ．
(6) $\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ とし, $\eta = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$ とする．$\varphi^*\eta$ を求めよ．
(7) $\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ とし, $\eta = \frac{1}{x^2+y^2}dx \wedge dy$ とする．$\varphi^*\eta$ を求めよ．

(答)

(1).

$$(x\,dx + y\,dy) \wedge (-y\,dx + x\,dy) = y\,dy \wedge (-y\,dx) + x\,dx \wedge (x\,dy) = (x^2+y^2)\,dx \wedge dy$$

計算には $dx \wedge dx = 0,\ dy \wedge dy = 0$ を使った．

(2).

$$\begin{aligned}(x\,dx + y\,dy) \wedge (y\,dy + z\,dz) \wedge (x\,dx + z\,dz) &= xyz\,dx \wedge dy \wedge dz + yzx\,dy \wedge dz \wedge dx \\ &= 2xyz\,dx \wedge dy \wedge dz.\end{aligned}$$

(3).

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz = \frac{2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz}{x^2+y^2+z^2}.$$

(4).

$$\begin{aligned}dw &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) dy \wedge dx + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) dx \wedge dy \\ &= \frac{-(x^2+y^2)+y(2y)}{(x^2+y^2)^2}\,dy \wedge dx + \frac{x^2+y^2-x(2x)}{(x^2+y^2)^2}\,dx \wedge dy \\ &= \frac{x^2-y^2-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx \wedge dy \\ &= 0.\end{aligned}$$

(5).

$$\varphi^*\eta = \frac{1}{x^m}\frac{\partial(x^m)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial(y^n)}{\partial y}\,dy = \frac{m}{x}\,dx + ny^{n-1}\,dy.$$

[5] 6 枚のチャートの場合は流石に全てチェックしなくても許されると思います．

(6).

$$\begin{aligned}
\varphi^*\eta &= \frac{-r\sin\theta}{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}\left(\frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial r}\,dr+\frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial\theta}\,d\theta\right)\\
&\quad+\frac{r\cos\theta}{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}\left(\frac{\partial(r\sin\theta)}{\partial r}\,dr+\frac{\partial(r\sin\theta)}{\partial\theta}\,d\theta\right)\\
&= -\frac{\sin\theta}{r}\big(\cos\theta\,dr-r\sin\theta\,d\theta\big)+\frac{\cos\theta}{r}\big(\sin\theta\,dr+r\cos\theta\,d\theta\big)\\
&= d\theta.
\end{aligned}$$

(7).

$$\begin{aligned}
\varphi^*\eta &= \frac{1}{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}\left(\frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial r}\,dr+\frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial\theta}\,d\theta\right)\wedge\left(\frac{\partial(r\sin\theta)}{\partial r}\,dr+\frac{\partial(r\sin\theta)}{\partial\theta}\,d\theta\right)\\
&= \frac{1}{r^2}\big(\cos\theta\,dr-r\sin\theta\,d\theta\big)\wedge\big(\sin\theta\,dr+r\cos\theta\,d\theta\big)\\
&= \frac{r(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}{r^2}\,dr\wedge d\theta\\
&= \frac{1}{r}\,dr\wedge d\theta.
\end{aligned}$$