中間レポート 1 問題

提出締め切り 2025 年 12 月 12 日 (金) 23 時 59 分 59 秒 (日本標準時刻)

- 2025 年 12 月 12 日 (金) 23 時 59 分 59 秒までに CLE にて提出してください.
- 黒板発表をしていない人は必ず提出すること. 逆に黒板での発表をしたものは提出は任意とする.[1]
- 解答に関しては答えのみならず, 答えを導出する過程をきちんと記すこと.
- 定義に関しては原則的に”松本先生の講義”および”松本幸夫著 多様体の基礎 (東京大学出版会)”のものを採用する.
- レポート問題の解答を 12 月 5 日前後に CLE に公開する予定です.

問題 1. 次の問いに答えよ. ただし m を 1 以上の整数とする.

(1) 位相空間 M がハウスドルフであることの定義を述べよ.

(2) M をハウスドルフ空間とする. M のチャート (局所座標近傍) と C^∞ 級アトラス (局所座標近傍系) の定義を述べよ. [2]

問題 2. 次の問いに答えよ. ただし m を 1 以上の整数, M を C^∞ 級 m 次元多様体, $p \in M$ とする.

(1) 接ベクトル空間 T_pM の定義を述べよ. なお”多様体の基礎”では複数の定義の仕方があるが, どれを答えても正解とする.

(2) 余接ベクトル空間 T_p^*M の定義を述べよ. ただしその際に”ベクトル空間の双対空間” の定義もきちんと述べること.

(3) 多様体上の C^∞ 級微分形式とは何か. 定義を説明せよ. [3]

問題 3. $S^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2+z^2=1\}$ とおく. 次の問いに答えよ. ただし $\mathbb{R}^3$ にはユークリッド位相を入れて, S^2 には $\mathbb{R}^3$ の相対位相を入れる.

(1) S^2 がハウスドルフであることを示せ.

(2) S^2 の C^∞ 級アトラス (局所座標近傍系)$\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ を具体的に構成せよ. [4]

問題 4. 次の計算をせよ.

(1) $(xdx+ydy) \wedge (-ydx+xdy)$ を求めよ.

(2) $(xdx+ydy) \wedge (ydy+zdz) \wedge (xdx+zdz)$ を求めよ.

(3) $f(x,y,z) = \log(x^2+y^2+z^2)$ について, df を求めよ.

(4) $\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$ について, $d\omega$ を求めよ.

(5) $\varphi(x,y) = (x^m, y^n)$ とし, $\eta = \frac{1}{x}dx + dy$ とする. $\varphi^*\eta$ を求めよ.

(6) $\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ とし, $\eta = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$ とする. $\varphi^*\eta$ を求めよ.

(7) $\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ とし, $\eta = \frac{1}{x^2+y^2}dx \wedge dy$ とする. $\varphi^*\eta$ を求めよ.

---

[1] ガイダンス資料にあるとおり, 黒板での発表の方がレポートより演習点 (演習の成績加点) は高いため. なおこの中間レポートは試験対策の意味もあります.

[2] この問題は松本先生の試験問題で実際に出た問題. `http://www4.math.sci.osaka-u.ac.jp/~matsumoto/courses/2023-g1/`

[3] この問題は松本先生の中間レポートにあった問題.

[4] 基本的には 2 枚か 6 枚の（局所）座標近傍 (チャート) で S^2 を覆うものがあるが, どちらを答えてもよい.