1 $\mathbb{R}^n$ 上の微分形式 (1)

1. $\mathbb{R}^3$ の開集合 U で定義された微分 1 形式は，一般に

$$\omega = f\,dx + g\,dy + h\,dz$$

と表される．$\omega \wedge \omega = 0$ であることを直接的な計算によって確かめよ．

2. $\mathbb{R}^3$ の微分形式

$$\omega = y\,dx - x\,dz, \qquad \eta = z\,dy, \qquad \tau = z\,dx \wedge dy + x\,dy \wedge dz$$

について，$\omega \wedge \eta$，$\omega \wedge \tau$，$\eta \wedge \tau$ を求めよ．

3. n を正整数とする．$\mathbb{R}^{2n}$ の微分 2 形式

$$\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 + \cdots + dx_{2n-1} \wedge dx_{2n}$$

について，$\underbrace{\omega \wedge \omega \wedge \cdots \wedge \omega}_{n\text{ 個}}$ を求めよ．

4. $\mathbb{R}^n$ の開集合 U で定義された関数 f に対し，微分 1 形式 df を

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\,dx_i$$

と定義する（f の**微分**ないし**全微分**）．曲線 $\gamma\colon [a,b] \to U$ に沿った df の線積分は

$$\int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

で与えられることを示せ．

5. $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ で定義された微分 1 形式

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

を考える．曲線 $\gamma\colon [0,2\pi] \to U$ を $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ によって定義する．線積分 $\displaystyle\int_\gamma \omega$ の値を求めよ．また，$\omega = df$ をみたす U 上の関数 f が存在しないことを示せ．

6.　$\mathbb{R}^n$ の開集合 U で定義された微分 k 形式 ω とベクトル場 X_1，X_2，……，X_k に対し，関数 $\omega(X_1, X_2, \dots, X_k)$ を次の性質 (i)，(ii) によって定義する．

(i)　$\omega(X_1, X_2, \dots, X_k)$ は ω，X_1，X_2，……，X_k の各々について $C^\infty(U)$ 線形．

(ii)　$(dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k})\left(\dfrac{\partial}{\partial x_{j_1}}, \dfrac{\partial}{\partial x_{j_2}}, \dots, \dfrac{\partial}{\partial x_{j_k}}\right)$ は定数関数 1，-1，0 のいずれかであり，次で与えられる*．

(a)　i_1，i_2，……，i_k がすべて相異なり $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} = \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$ のときは

$$(dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k})\left(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}, \frac{\partial}{\partial x_{j_2}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{j_k}}\right) = \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}.$$

ただし $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$ は各 i_l を j_l に対応させる k 文字の置換をあらわす．

(b)　(a) 以外の場合は

$$(dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k})\left(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}, \frac{\partial}{\partial x_{j_2}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{j_k}}\right) = 0.$$

上記の定義から，より一般に，微分 1 形式 ω_1，ω_2，……，ω_k およびベクトル場 X_1，X_2，……，X_k に対し

$$(\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_k)(X_1, X_2, \dots, X_k) = \begin{vmatrix} \omega_1(X_1) & \omega_1(X_2) & \dots & \omega_1(X_k) \\ \omega_2(X_1) & \omega_2(X_2) & \dots & \omega_2(X_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_k(X_1) & \omega_k(X_2) & \dots & \omega_k(X_k) \end{vmatrix}$$

であることもわかる．

これらのことを前提として，微分 k 形式 ω，微分 l 形式 η，およびベクトル場 X_1，X_2，……，X_{k+l} に対し

$$(\omega \wedge \eta)(X_1, X_2, \dots, X_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (\operatorname{sgn}\sigma)\omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)})\eta(X_{\sigma(k+1)}, \dots, X_{\sigma(k+l)})$$

であることを示せ．ただし S_{k+l} は $\{1, 2, \dots, k+l\}$ のすべての置換からなる集合をあらわす（$k+l$ 次の対称群）．

---

*実は $(dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k})\left(\dfrac{\partial}{\partial x_{j_1}}, \dfrac{\partial}{\partial x_{j_2}}, \dots, \dfrac{\partial}{\partial x_{j_k}}\right)$ の値をここで述べたものの $1/k!$ 倍と約束する流儀もある．2 つの流儀の違いは「k 個のベクトルが張る正 $2k$ 面体の体積を考えるか，k 単体（点，線分，三角形，四面体，……）の体積を考えるかの違いだ」と説明できる．文献にあたるときはどちらの流儀が採用されているか注意すること．