9　ユークリッド空間の位相

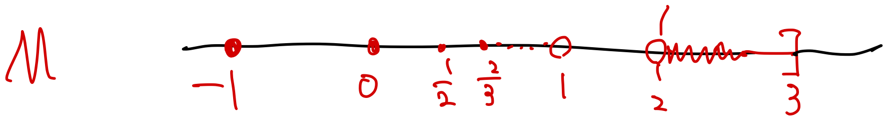
学籍番号:　　　　　　　　　　名前

$\mathbb{R}$ を実数の集合, $\mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}$ の n 個の直積とする.

1. $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}$ について, ユークリッド距離 $d^{(n)}$ を以下で定める.

$$d^{(n)}(x, y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

2. $a \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ について, $B_n(a, \varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^n \ d^{(n)}(a, x) < \varepsilon\}$ を a を中心とし ε を半径と



(1) $-1 \notin M^i$ $(\forall\varepsilon, (-1-\varepsilon, -1+\varepsilon) \not\subset M.)$

$1-\frac{1}{n} \notin M^i$ $((1-\frac{1}{n}-\varepsilon, 1-\frac{1}{n}+\varepsilon)$ にくりすうがある$)$

$3, 2 \notin M^i$ $(2-\varepsilon, 3+\varepsilon$ がダメ$)$

(2) $-1 \in \overline{M}$ $((-1-\varepsilon, -1+\varepsilon) \cap M \ni -1)$

$2, 3 \in \overline{M}$:

$1-\frac{1}{n} \in \overline{M}$ $((1-\frac{1}{n}-\varepsilon, 1-\frac{1}{n}+\varepsilon) \ni 1-\frac{1}{n}$.

$1 \in \overline{M}$ $((1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \ni 1-\frac{1}{n}$ n が大きい$)$

(3) $-1 \in M^f$ $((-1-\varepsilon, -1-\varepsilon) \ni \boxed{-1}$ Mの元 $\ni \boxed{-1-\frac{1}{2}\varepsilon}$ M^cの元

$1 \in M^f$ $((1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \ni 1-\frac{1}{n} \in M$, $1 \in M^c$

$2, 3 \in M^f$.

$1-\frac{1}{n} \in M^f$ $((1-\frac{1}{n}-\varepsilon, 1-\frac{1}{n}+\varepsilon) \ni 1-\frac{1}{n}$, $\ni 1-\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\varepsilon$ $(\varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$

上の $\mathscr{O}(\mathbb{R}^n)$ の性質は一般の距離空間でも成り立つ．後期の授業では上の $\mathscr{O}(\mathbb{R}^n)$ の性質を逆手にとって, 一般の集合 X について位相空間 $(X, \mathscr{O})$ を定義する.

問題 1. $\mathbb{R}$ の部分集合

$$M = \{-1\} \cup (2, 3] \cup \left\{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$$

について以下を求めよ．ただし $\mathbb{R}$ にはユークリッド距離を入れる.

(1)M の内部 M^i $(= M^\circ)$　　解答欄: $(2, 3)$

(2)M の閉包 $\overline{M}(= M^a)$　　解答欄: $\{-1\} \cup [2, 3] \cup \{1-\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \cup \{1\}$

(3)M の境界 $M^f(= \partial M)$　　解答欄: $\{-1, 1, 2, 3\} \cup \{1-\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$

② $\forall \varepsilon > 0$, $B_2((x,y),\varepsilon)$ は 有理数のペア (x,y) も 無理数のペア (x,y) も ふくむ

問題 2. $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $\mathbb{Q}^2$ について, 以下を求めよ. ただし $\mathbb{R}^2$ にはユークリッド距離を入れる.

(1)$\mathbb{Q}^2$の内部　　解答欄: ϕ

(2)$\mathbb{Q}^2$の閉包　　解答欄: $\mathbb{R}^2$

(3)$\mathbb{Q}^2$の境界　　解答欄: $\mathbb{R}^2$

問題 3. 「部分集合 $M \subset \mathbb{R}^n$ が閉集合ならば $M^c = \mathbb{R}^n \setminus M$ は開集合である.」この主張の証明が完成するように空欄をうめよ. ただし空欄には後記の語句群から適切な語句・記号を一つ選んで記入すること.

[証明.]　M が閉集合であると仮定する. M^c が開集合を示す. つまり $\boxed{M^c = (M^c)^i}$ を示せば良い.

$\boxed{(M^c)^i \subset M^c}$ は常に成り立つので逆の包含を示す. $x \in M^c$ とする. 今 M は閉集合なので, $y \in M$ について, $\boxed{\text{任意の}}$ $\varepsilon > 0$ について, $B_n(y,\varepsilon) \cap M$ $\boxed{\neq}$ $\varnothing$ となる.

よって $x \in M^c$ について, $\boxed{\text{ある}}$ $\varepsilon > 0$ があって, $B_n(x,\varepsilon) \cap M$ $\boxed{=}$ $\varnothing$ となる. よって $B_n(x,\varepsilon) \subset M^c$ が成り立つ. 以上より

$$\text{ある } \varepsilon > 0 \text{ があって } B_n(x,\varepsilon) \subset M^c \text{ が成り立つ}$$

ため $x \in (M^c)^i$ となる. よって M^c が開集合である.

語句群

ある　任意の　$\subset$　$\supset$　$\in$　$\notin$　$=$　$\neq$

$M^c = \overline{M^c}$　$M^c \subset \overline{M^c}$　$M^c \supset \overline{M^c}$　$M^c = (M^c)^i$　$(M^c)^i \subset M^c$　$(M^c)^i \supset M^c$

問題 4. 「部分集合 $M \subset \mathbb{R}^n$ が開集合ならば $M^c = \mathbb{R}^n \setminus M$ は閉集合である.」この主張の証明が完成するように空欄をうめよ. ただし空欄には後記の語句群から適切な語句・記号を一つ選んで記入すること.

[証明.]　M が開集合であると仮定する. M^c が閉集合を示す. つまり $\boxed{M^c = \overline{M^c}}$ を示せば良い.

$\boxed{M^c \subset \overline{M^c}}$ は常に成り立つので逆の包含を示す. これは $\overline{M^c} \cap M = \varnothing$ を示すことと同値である. $x \in \overline{M^c} \cap M$ となる x が存在したと仮定する. M は開集合なので, $\boxed{\text{ある}}$ $\varepsilon > 0$ があって, $B_n(x,\varepsilon)$ $\boxed{\subset}$ M となる. 一方 $x \in \overline{M^c}$ より, $B_n(x,\varepsilon) \cap M^c$ $\boxed{\neq}$ $\varnothing$ である. 以上より

$$\varnothing \boxed{\neq} B_n(x,\varepsilon) \cap M^c \subset M \cap M^c = \varnothing$$

となり矛盾. よって M^c は閉集合である.

語句群

ある　任意の　$\subset$　$\supset$　$\in$　$\notin$　$=$　$\neq$

$M^c = \overline{M^c}$　$M^c \subset \overline{M^c}$　$M^c \supset \overline{M^c}$　$M^c = (M^c)^i$　$(M^c)^i \subset M^c$　$(M^c)^i \supset M^c$

[補足] 問題 3,4 の主張は後の距離空間でも成り立つ.