8　ツォルンの補題と整列可能定理

学籍番号:　　　　　　　　　　　　名前

$(X, \leq)$ を半順序集合とする

1. 部分集合 $S \subset X$ が全順序部分集合 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の $x, y \in S$ について $x \leq y$ か $y \leq x$ のどちらかが成り立つこと.
2. $(X, \leq)$ が帰納的 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の全順序部分集合 $S \subset X$ について, 上界を持つこと.(つまりある $v \in X$ があって任意の $s \in S$ について $s \leq v$ となること.)
3. $a \in X$ が極大元 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $a \leq x$ かつ $a \neq x$ なる $x \in X$ が存在しない $\Longleftrightarrow$ $a \leq x$ ならば $a = x$.

定理 4. 以下の命題は (ZF 公理系 (ツェルメロ・フレンケル公理系)) において同値な命題である.

(1). (選択公理) 任意の $\lambda \in \Lambda$ について $A_\lambda \neq \varnothing$ ならば, $\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \neq \varnothing$ である.
(2). (ツォルンの補題) 帰納的な半順序集合は少なくとも一つの極大元を持つ.
(3). (整列可能定理) 任意の集合 X について, ある順序 $\leq$ があって $(X, \leq)$ は整列集合になる.

つまり選択公理を認めれば, ツォルンの補題や整列可能定理は成り立つ.

[補足] 選択公理と同値な命題は数多くある. https://alg-d.com/math/ac/list.html を参照.[3]

問題 1. 選択公理を仮定すると, 集合 X, Y について, (1), (2), (3) のいずれかただ一つのみが成り立つ.

$(1) X \sim Y$　(2) X は Y より濃度が小さい.　(3) Y は X より濃度が小さい.

この主張の証明が完成するように空欄をうめよ. ただし空欄には後記の語句群から適切な語句・記号を一つ選んで記入すること.

[証明.] まず上の (1), (2), (3) のうち二つ以上が成り立つことはあり得ないことを示す. X は Y より濃度が小さいの定義は「$X \not\sim Y$」かつ「単射 $X \to Y$ が存在する」である. よって (1) と (2), (1) と (3) がともに成り立つことはあり得ない. また (2) と (3) がともに成り立てば, [ベルンシュタインの定理] から, 全単射 $X \to Y$ が存在する. よって (1) が成り立ち矛盾する. つまり (2) と (3) がともに成り立つことはあり得ない.

次に (1), (2), (3) のどれかが成り立つことを示す. [整列可能定理] から X や Y 上にある順序 $\leq_X, \leq_Y$ が存在して $(X, \leq), (Y, \leq_Y)$ は整列集合となる. よって

(a)X と Y が順序同型　(b) X と Y のある切片 $Y\langle b \rangle$ が順序同型.　(c) X のある切片 $X\langle a \rangle$ と Y が順序同型.

のいずれか一つが成り立つ. (a) の場合は [(1)] が成り立つ. (b) の場合は包含写像 $Y\langle b \rangle \hookrightarrow Y$ を用いて, 単射 $X \hookrightarrow Y$ を構成できる. この場合は [(1)] と [(2)] のどちらかが成り立つ . (c) の場合は [(1)] と [(3)] のどちらかが成り立つ. 以上より言えた.

語句群

選択公理　ツォルンの補題　整列可能定理　カントールの定理　ベルンシュタインの定理 (カントール・ベルンシュタインの定理)　超限帰納法　(1)　(2)　(3)

[3] 選択公理を認めた ZF 公理系を ZFC 公理系という. この辺りは私は全くの素人なので, alg-d さんの Youtube https://www.youtube.com/@alg-dx に譲る.

問題 2. $(X, \leq_X) = (\mathbb{N}, \leq)$ とする．ここで $\leq$ は通常の順序である．次に $Y = \mathbb{N} \cup \{-1\}$ とし，

$$x < y \iff \text{「}y = -1\text{」または「}x, y \in \mathbb{N} \text{ かつ } x < y\text{」}$$

とする．[4] そして $x \leq_Y y$ を「$x < y$ または $x = y$」として定義する．すると $(X, \leq_X)$, $(Y, \leq_Y)$ はともに整列集合になる．この $(X, \leq_X)$, $(Y, \leq_Y)$ に関する以下の主張のうち正しいものを全て選べ．

(1)$X \sim Y$　(2) X は Y より濃度が小さい．　(3) Y は X より濃度が小さい．
(4)X と Y が順序同型　(5) X と Y のある切片 $Y\langle b\rangle$ が順序同型．　(6) X のある切片 $X\langle a\rangle$ と Y が順序同型．

解答: (1)　(5)

全単射 $\mathbb{N} \cup \{-1\} \to \mathbb{N}$
$-1 \mapsto 0$
$n \mapsto n+1$

X　$0 < 1 < 2 \cdots$
Y　$0 < 1 < 2 < \cdots < -1$
b

問題 3. K を体とし，V を K 上の (空でない) ベクトル空間とする．(無限でもいい) 部分集合 $B \subset V$ において以下を定義する．[5]

(A). B が線形独立 $\overset{\text{def}}{\iff}$ 任意の $a_1, \ldots, a_n \in K$ と任意の $v_1, \ldots, v_n \in B$ について $a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = 0 \in V$ ならば $a_1 = \cdots = a_n = 0$ である．

(B). B が V を生成する．$\overset{\text{def}}{\iff}$ 任意の $v \in V$ について，ある $a_1, \ldots, a_n \in K$ と $v_1, \ldots, v_n \in B$ があって，$v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$ となる．

上の (A) と (B) を満たすとき B は V の基底という．

選択公理を仮定すると，ベクトル空間 V の基底は必ず存在する．この主張の証明が完成するように空欄をうめよ．ただし空欄には後記の語句群から適切な語句・記号を一つ選んで記入すること．

[証明]. $\mathcal{W} := \{B \subset V | B$ が線形独立 $\}$ とし，$B_1 \leq B_2$ という順序を $B_1 \subset B_2$ として定義する．V は空ではないので $\mathcal{W}$ は空ではない．

$\mathcal{W}$ が帰納的な半順序集合であることを示す．つまり「任意の $\boxed{\text{全順序}}$ 部分集合 $\mathcal{S} \subset \mathcal{W}$ について $\boxed{\text{上界}}$ を持つこと」を示す．$\mathcal{S}$ をそのような部分集合とし $B_\infty := \cup_{B \in \mathcal{S}} B$ とおく．

まず $B_\infty \in \mathcal{W}$ を示す．定義から任意の $a_1, \ldots, a_n \in K$ と $v_1, \ldots, v_n \in B_\infty$ について

$$a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = 0 \in V \text{ ならば } a_1 = \cdots = a_n = 0 \quad (\sharp)$$

を示せば良い．今 $v_i \in B_\infty = \cup_{B \in \mathcal{S}} B$ より，$v_i \in B_i$ となる $B_i \in \mathcal{S}$ が存在する．$B_1, B_2 \in \mathcal{S}$ で $\mathcal{S}$ は $\boxed{\text{全順序}}$ 集合より，$B_1 \leq B_2$ または $B_2 \leq B_1$ が存在する．以上より $B_1 \subset B_2$ または $B_2 \subset B_1$ である．これを有限回繰り返して，ある $1 \leq N \leq n$ があって，$\cup_{i=1}^n B_i \subset B_N$ となる．$v_i \in B_N$ かつ $B_N \in \mathcal{W}$ より，$\mathcal{W}$ の定義から $(\sharp)$ が言える．

次に B_∞ が $\mathcal{S}$ の $\boxed{\text{上界}}$ であることを示す．つまり任意の $B \in \mathcal{S}$ について，$B \leq B_\infty$ を示せば良い．これは $B_\infty := \cup_{B \in \mathcal{S}} B$ より明らかである．

以上より $\boxed{\text{ツォルンの補題}}$ から，$(\mathcal{W}, \leq)$ は $\boxed{\text{極大}}$ 元 M を持つ．

M が基底であることを示す．もし基底でないならば，M が V を生成しない.((B) を満たさない)．つまりある $v \in V$ があって，$v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$ となるような，$a_1, \ldots, a_n \in K$ や $v_1, \ldots, v_n \in M$ は存在しない．よって $M^* := M \cup \{v\}$ とおくと $M \subset M^*$ かつ $M \neq M^*$ である．これは M の $\boxed{\text{極大}}$ 性に矛盾する．よって M は V の基底となる．

語句群

選択公理　ツォルンの補題　整列可能定理　超限帰納法　帰納的　半順序　全順序　整列
最小　最大　極小　極大　上界　下界　上限　下限

[4]「$x, y \in \mathbb{N}$ かつ $x < y$」における"$<$"は $\mathbb{N}$ の順序とする．
[5] 以下の用語はこの授業でのみの用語である．