

7 選択公理

学籍番号:

名前

Λ を空でない集合, $(A_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ を Λ を添字集合とする集合系とする.

1. 集合系の直積 $\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ を次で定める.

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda := \{f : \Lambda \rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \mid f(\lambda) \in A_\lambda\}$$

また各 A_λ を直積因子という.

2. $\Lambda = \{1, 2\}$ のとき, $\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = A_1 \times A_2$ となる. これは $f : \Lambda \rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ について, $f_1 := f(1) \in A_1, f_2 := f(2) \in A_2$ とすると, f と (f_1, f_2) は一対一に対応するからである.
3. 任意の $\mu \in \Lambda$ について, $\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ から A_μ の (第 μ) 射影を以下で定義する.

$$\begin{aligned} p_\mu : \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda &\rightarrow A_\mu \\ f &\mapsto f(\mu) \end{aligned}$$

定義 3 (選択公理). Λ を空でない集合, $(A_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ を Λ を添字集合とする集合系とする.

1. (選択公理) 「任意の $\lambda \in \Lambda$ について $A_\lambda \neq \emptyset$ ならば, $\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \neq \emptyset$ である」という公理を選択公理という.
2. 上において $f \in \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ を選択関数という. これは任意の $\lambda \in \Lambda$ について, A_λ の元 $f(\lambda) \in A_\lambda$ を一つ選択していることに由来する.
3. X を空でない集合とする. $\prod_{B \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}} B$ の元 f を X 上の選択関数という. これは任意の空でない X の部分集合 $B \subset X$ について, B の元 $f(B) \in B$ を一つ選択していることに由来する.

問題 1. 選択公理を仮定する. 「任意の空でない集合の間の全射 $f : X \rightarrow Y$ について, ある写像 $g : Y \rightarrow X$ が存在して $f \circ g = id_Y$ である.」この主張の証明が完成するように空欄をうめよ. ただし空欄には後記の語句群から適切な語句・記号を一つ選んで記入すること.

[証明.] $f : X \rightarrow Y$ を空でない集合の間の全射とする. $y \in Y$ について $A_y := f^{-1}(y)$ とおく. すると任意の $y \in Y$ について $A_y \neq \emptyset$ なので, 選択公理 から $\prod_{y \in Y} A_y \neq \emptyset$ となる.

そこで $g \in \prod_{y \in Y} A_y$ とする. g は Y から $\bigcup_{y \in Y} A_y$ への写像である. $\bigcup_{y \in Y} A_y \subset X$ に注意すれば,

$$\begin{aligned} g : Y &\rightarrow X \\ y &\mapsto g(y) \end{aligned}$$

($\bigcup_{y \in Y} A_y$ は空でない)
 があの形に
 はない?

と定めることができる. $g \in \prod_{y \in Y} A_y$ なので, 任意の $y \in Y$ について $g(y) \in A_y$ となる. $A_y = f^{-1}(y)$ なので, $f(g(y)) = y$ となる.

語句群

選択関数 選択公理 直積因子 $\prod_{y \in Y} A_y$ $\bigcup_{y \in Y} A_y$ $\bigcap_{y \in Y} A_y$ A_y Λ $\emptyset$

問題 2. 「 Λ を空でない集合, $(A_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ を Λ を添字集合とする集合系, $p_\mu : \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \rightarrow A_\mu$ は第 μ 射影とする. さらに集合 Y と写像の族 $g_\lambda : Y \rightarrow A_\lambda$ が存在すると仮定する.

このとき写像 $g : Y \rightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ で任意の $\mu \in \Lambda$ について $g_\mu = p_\mu \circ g$ となるものがただ一つ存在する。」

以上の主張の証明が完成するように空欄をうめよ. ただし空欄には後記の語句群から適切な語句・記号を一つ選んで記入すること.

[証明.] まず $g : Y \rightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ を以下のように構成する. $y \in Y$ について Λ から $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ への写像 $g(y)$ を

$$g(y)(\lambda) := g_\lambda(y) \quad (\lambda \in \Lambda)$$

として定める. すると任意の λ について $g(y)(\lambda) \in \boxed{A_\lambda}$ であるので, $g(y) \in \boxed{\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda}$ となる.

この g が「任意の $\mu \in \Lambda$ について $g_\mu = p_\mu \circ g$ である」ことを示す. $\mu \in \Lambda$ をとると p_μ の定義から,

$$\text{任意の } y \in Y \text{ について } p_\mu \circ g(y) = \boxed{g(y)(\mu)} = g_\mu(y)$$

である. よって $g_\mu = p_\mu \circ g$ である.

次に唯一性を示す. $g, h : Y \rightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ とする.

$$\text{任意の } \mu \in \Lambda \text{ について } g_\mu = p_\mu \circ g = p_\mu \circ h \text{ となるならば } g = h$$

を示せば良い. 上のような g, h をとる. ここで

$$g = h \text{ は「任意の } y \in Y \text{ について } g(y) = h(y)\text{」と同値である.}$$

さらに $y \in Y$ について, $g(y), h(y) \in \boxed{\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda}$ なので,

$$g(y) = h(y) \text{ は「任意の } \lambda \in \Lambda \text{ について } g(y)(\lambda) = h(y)(\lambda)\text{」と同値である.}$$

以上より任意の $y \in Y$ と $\lambda \in \Lambda$ について, $g(y)(\lambda) = h(y)(\lambda)$ を示せば良い. ここで $g(y)(\lambda) \in \boxed{A_\lambda}$ である.

今 g, h の仮定から, 「任意の $\mu \in \Lambda$ について $g_\mu = p_\mu \circ g = p_\mu \circ h$ 」である. よって任意の $y \in Y$ と $\lambda \in \Lambda$ について,

$$g(y)(\lambda) = p_\lambda(g(y)) = \boxed{g_\lambda(y)} = p_\lambda(h(y)) = h(y)(\lambda)$$

であるので $g = h$ である.

語句群

$\Lambda \quad \lambda \quad \mu \quad \emptyset \quad A_\lambda \quad \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \quad \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \quad \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$
 $g(\mu) \quad g(y)(\mu) \quad g_\mu(y) \quad p_\mu(y) \quad g(y) \quad g(\lambda) \quad g(y)(\lambda) \quad g_\lambda(y) \quad p_\lambda(y)$

[注意] 今回は演習のためにこのように書いているが, 証明としては非常に良くない. 試験等で行う証明においてはもう少し簡略してわかりやすく書いたほうが良いと思う. (少なくともいくつかの議論は省略して良い.)