6　整列集合

学籍番号:　　　　　　　　　　　　名前

$(X, \leq)$ を半順序集合とする.

1. $(X, \leq)$ が整列集合 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 空でない部分集合 $A \subset X$ について最小元 $\min A$ が存在する．整列集合は全順序集合である.
2. $a < b \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} a \leq b$ かつ $a \neq b$.
3. $(X, \leq)$ が整列集合とする．$a \in X$ について a の切片 $X\langle a \rangle := \{x \in X | x < a\}$ とする.

定理 2. $(X, \leq)$ を整列集合とする.

1. $\varphi : (X, \leq) \to (X, \leq)$ が順序を保つ単射ならば, 任意の $x \in X$ について $x \leq \varphi(x)$.
2. $(X, \leq_X)$, $(Y, \leq_Y)$ を整列集合とするとき, 次のいずれかただ一つのみが成り立つ.
   (1). X と Y が順序同型
   (2). X と Y のある切片 $Y\langle b \rangle$ が順序同型.
   (3). X のある切片 $X\langle a \rangle$ と Y が順序同型.
3. (超限帰納法)$(X, \leq)$ を整列集合とし, $a \in A$ についてある命題 $P(a)$ が与えられているとする．以下の二つを仮定する.
   (1). $P(\min X)$ が真.
   (2). 任意の $x \in X$ について, 「全ての $y \in X\langle x \rangle$ について $P(y)$ が真ならば, $P(x)$ も真である」がなりたつ.

   このとき任意の $a \in X$ について $P(a)$ は真である.(なお $X = \mathbb{N}$ のときの超限帰納法は数学的帰納法である.)

問題 1. $\mathbb{N} :=$ { 自然数の集合 } $= \{0, 1, 2, \ldots\}$ とし, $(X, \leq_X) := (\mathbb{N}, \leq)$ とする．ここで $\leq$ は通常の順序である．次に $Y = \{1, 2\} \times \mathbb{N}$ とし,

$$(x, n) < (y, m) \Longleftrightarrow \text{「}x < y\text{」または「}x = y \text{ かつ } n < m\text{」}$$

とする．そして $(x, n) \leq_Y (y, m)$ を「$(x, n) < (y, m)$ または $(x, n) = (y, m)$」として定義する．すると $(Y, \leq_Y)$ は半順序集合になる.

実は $(X, \leq_X)$, $(Y, \leq_Y)$ はともに整列集合になる．よって上の定理から, 次のいずれかただ一つのみが成り立つ.

主張 (1). X と Y が順序同型
主張 (2). X と Y のある切片 $Y\langle b \rangle$ が順序同型.
主張 (3). X のある切片 $X\langle a \rangle$ と Y が順序同型.

上の X, Y については主張 (1), (2), (3) のどれが成り立つか答えよ．また (2) を選んだ場合は「X と $Y\langle b \rangle$ が順序同型」となる b を求め, (3) を選んだ場合は「$X\langle a \rangle$ と Y が順序同型」となる a を求めよ．なお (1) を選んだ場合, 該当する欄は空白にしておいて良い.

解答: 主張　(2)　が正しい．さらに a または b は $(2,0)$　である.

$X:$ $0 < 1 < 2 < \cdots$
$Y:$ $(1,0) < (1,1) < (1,2) < (1,3) < \cdots$ ここが同型
$< \underbrace{(2,0)}_{=b} < (2,1) < \cdots$

問題 2. 集合と二項関係の組 $(X, \leq)$ について, 次の条件 (a)~(d) を考える.

条件

(a). 整列集合である.
(b). 全順序集合であるが整列集合ではない.
(c). 半順序集合であるが, 全順序集合ではない.
(d). 半順序集合ではない.

以下の集合と二項関係の組 $(X, \leq)$ は上の (a)~(d) のうちどれを満たすか答えよ.

(1). $(\mathbb{R}, \leq)$. $\leq$ は通常の順序とする.
(2). $(\mathbb{Q}, \leq)$. $\leq$ は通常の順序とする.
(3). $(\mathbb{N}, \leq)$. $\leq$ は通常の順序とする.
(4). $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \leq)$. ただし二項関係 $(x, y) \leq (a, b)$ を $x \leq a$ かつ $y \leq b$ とする.
(5). $(\mathfrak{P}(\mathbb{N}), \leq)$. ただし二項関係 $A \leq B$ を $A \subset B$ とする. ($\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ は $\mathbb{N}$ のベキ集合である.)
(6). $(\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \leq_{\mathbb{N}})$. ただし $a \leq_{\mathbb{N}} b$ を「$b = na$ となる 0 でない自然数 n が存在する (a は b を割り切る)」とする.
(7). $(\mathbb{Z} \setminus \{0, 1, -1\}, \leq_{\mathbb{Z}})$. ただし $a \leq_{\mathbb{Z}} b$ を「$b = na$ となる 0 でない整数 n が存在する」とする.

(1). 解答. (b) ← $\{1-\frac{1}{n} \mid n=1,2,\ldots\}$ が最大元なし
(2). 解答. (b)
(3). 解答. (a)
(4). 解答. (c) $(1,2)$ と $(2,1)$ の大小がわからん
(5). 解答. (c) $\{1,2\}$ と $\{1,3\}$ 〃
(6). 解答. (c) 2 と 5 〃
(7). 解答. (d) $2 \leq -2$ かつ $-2 \leq 2$ だが $2 \neq -2$.
(反対称律がダメ)

問題 3. 「整列集合 X はいかなる切片 $X\langle a \rangle$ とも順序同形にならない」の主張の証明が完成するように空欄をうめよ. ただし空欄には後記の語句群から適切な語句・記号を一つ選んで記入すること.

[証明.] $(X, \leq)$ が $(X\langle a \rangle, \leq)$ と順序同型であると仮定する. $f : X \to X\langle a \rangle$ を順序同型とする. すると包含写像 $i : X\langle a \rangle \to X$ は順序を保つので, $i \circ f : X \to X$ は $\boxed{\text{単射}}$ になる. よって $a \boxed{\leq} i \circ f(a)$ となる. しかし $i \circ f(a) \in X\langle a \rangle$ より $i \circ f(a) \boxed{<} a$ となり矛盾である.

語句群

順序を保つ全射　順序を保つ単射　順序同型　$\leq$　$\geq$　$<$　$>$　$=$　$\neq$　$\in$　$\notin$