5　同値関係 (二項関係)・商集合

X を集合とする,

1. ρ が集合 X 上の二項関係とは, 任意の $(a,b) \in X \times X$ について, 満たすか満たさないかが判定できる規則のこと.
2. 対 (a,b) が二項関係 ρ を満たすとき $a\rho b$ とかく.
3. X 上の二項関係 ρ についてグラフ $G(\rho) := \{(a,b) \in X \times X | a\rho b\}$ とする.
4. $\sim$ を X 上の二項関係とする. $\sim$ が次を満たすとき, $\sim$ を同値関係という.

   (1). (反射律) 任意の $x \in X$ について $x \sim x$.
   (2). (対称律) $x \sim y$ ならば, $y \sim x$.
   (3). (推移律) $x \sim y$ かつ $y \sim z$ ならば, $x \sim z$.

5. $\sim$ を同値関係とする. $x \in X$ について, $C(x) := \{y \in X | x \sim y\}$ を x の同値類という. $C(x) \cap C(y) \neq \varnothing \Longleftrightarrow x \sim y \Longleftrightarrow C(x) = C(y)$ である.
6. $X/\sim := \{C(x) | x \in X\}$ を商集合という. $C \in X/\sim$ について $C = C(x)$ となる $x \in X$ が存在する. この x を X の代表という. (代表の取り方は一つとは限らない).
7. 自然な射影 (商写像)$\pi : X \to X/\sim$ を $\pi(x) := C(x)$ で定める. $\pi(x) = \pi(y) \Longleftrightarrow x \sim y$ である.

$\boxed{1}$ の答え

(1) 推移律　aが5の倍数かつbが5の倍数 ⇒ a±b もそう

(2) 2と5でわりきれる = 10でわりきれる (1)と同じ

(3) 推移律の反例　$a=2,\ b=4,\ c=9$

(4) $a-b \in \mathbb{Q}$ かつ $b-c \in \mathbb{Q} \Rightarrow a-c \in \mathbb{Q}$ より

(5) $a=\sqrt{2},\ b=0,\ c=\sqrt{2}+1$ が推移律の反例

(6) 反射律の反例　$x=3$ のとき「$x \sim x$ ではない」

(7) 反例　$a=2$ $b=0,\ c=-2$.

(8) $\boxed{\text{実射影空間}}$　$\mathbb{R}P^1$ とよばれる

学籍番号:　　　　　　　　　　　　名前

問題 1. 次の二項関係 $\sim$ のうち同値関係であるものを全て選べ.

(1). 整数の集合 $\mathbb{Z}$ において, $a, b \in \mathbb{Z}$ の二項関係 $a \sim b$ を「$a-b$ は 5 で割り切れる」とする.
(2). 整数の集合 $\mathbb{Z}$ において, $a, b \in \mathbb{Z}$ の二項関係 $a \sim b$ を「$a-b$ は 2 と 5 で割り切れる」とする.
(3). 整数の集合 $\mathbb{Z}$ において, $a, b \in \mathbb{Z}$ の二項関係 $a \sim b$ を「$a-b$ は 2 または 5 で割り切れる」とする.
(4). 実数の集合 $\mathbb{R}$ において, $a, b \in \mathbb{R}$ の二項関係 $a \sim b$ を「$a-b \in \mathbb{Q}$」とする.
(5). 実数の集合 $\mathbb{R}$ において, $a, b \in \mathbb{R}$ の二項関係 $a \sim b$ を「$a-b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$」とする.
(6). 実数の集合 $\mathbb{R}$ において, $a, b \in \mathbb{R}$ の二項関係 $a \sim b$ を「$a \in [0,1]$ かつ $b \in [0,1]$」とする.
(7). 実数の集合 $\mathbb{R}$ において, $a, b \in \mathbb{R}$ の二項関係 $a \sim b$ を「$a \in [0,1]$ または $b \in [0,1]$」とする.
(8). $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ において, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ の二項関係 $\boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{b}$ を「0 でない実数 λ が存在して $\boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{b}$ となる」とする.

解答: (1), (2), (4), (8)

問題 2. 実数の集合 $\mathbb{R}$ に通常の順序 $\leq$ を入れて, $(\mathbb{R}, \leq)$ を半順序集合とみる. 次の値を求めよ. ただし存在しない場合は"なし"と答えよ.

(1)$(0,1)$ の最大値　　解答欄: なし
(2)$(0,1) \cup \{-2\}$ の最小値　　解答欄: -2
(3)$\mathbb{Q} \cap (0,1)$ の下限　　解答欄: 0
(4)$\mathbb{Q}$ の上限　　解答欄: なし

問題 3. 「X を集合, $\sim$ を X の同値関係, $\pi : X \to X/\sim$ を自然な射影とする. さらに集合 Y と写像 $f : X \to Y$ で, 以下の ($\sharp$) が成り立つと仮定する.

$$x \sim y \text{ ならば } f(x) = f(y) \text{ がなりたつ} \quad (\sharp)$$

このときある写像 $\widetilde{f} : X/\sim \to Y$ で $\widetilde{f} \circ \pi = f$ となるものがただ一つ存在する.」

以上の主張の証明が完成するように空欄をうめよ. ただし空欄には後記の語句群から適切な語句・記号を一つ選んで記入すること.

[証明]. まず $\widetilde{f} : X/\sim \to Y$ が存在することを示す. $a \in X/\sim$ とする. このとき π は $\boxed{\text{全射}}$ なので $\pi(x) = a$ となる $x \in \boxed{X}$ が存在する. そこで $\widetilde{f}(a) := f(x)$ として定める.

$\widetilde{f}$ が x の取り方によらないことを示す. つまり $a = \pi(x) = \pi(y)$ なる $x, y \in X$ について, $f(x) = f(y)$ を示せば良い. ここで $\pi(x) = \pi(y)$ ならば $x \boxed{\sim} y$ である. よって仮定 ($\sharp$) から $f(x) = f(y)$ となる. また f の定め方から $\widetilde{f} \circ \pi = f$ は明らかである. よって存在性が言えた.

次に唯一性を示す. つまり「$\widetilde{f}, \widetilde{g} : X/\sim \to Y$ で $\widetilde{f} \circ \pi = f = \widetilde{g} \circ \pi$ ならば $\widetilde{f} = \widetilde{g}$」であることを示す. 上のような $\widetilde{f}, \widetilde{g} : X/\sim \to Y$ をとる. 示すことは, 「任意の $a \in \boxed{X/\sim}$ について $\widetilde{f}(a) = \widetilde{g}(a)$」である. $a \in \boxed{X/\sim}$ とする. π は全射なので $\pi(x) = a$ となる $x \in X$ が存在する. よって

$$\widetilde{f}(a) = \widetilde{f}(\pi(x)) = \boxed{f(x)} = \widetilde{g}(\pi(x)) = \widetilde{g}(a) \text{ となり言えた.}$$

語句群

全射　単射　全単射　$\sim$　$\leq$　$\geq$　X　Y　$X/\sim$　$f(x)$　$\widetilde{f}(x)$　$\widetilde{g}(x)$　$f(a)$