4　濃度の大小

学籍番号:　　　　　　　　　　　　　名前

A, B, C を集合とする,

1. A と B の濃度が等しい. $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ある全単射 $f : A \to B$ が存在する.
2. A と B の濃度が等しいとき $A \sim B$ と書く． 以下の 3 条件 (同値関係) が成り立つ.
   (1). $A \sim A$.
   (2). $A \sim B$ ならば, $B \sim A$.
   (3). $A \sim B$ かつ $B \sim C$ ならば, $A \sim C$.
3. $F(A, B) := \{f : A \to B | f$ は写像 $\}$ とかく. B^A や $\mathrm{Map}(A, B)$ などの書き方もある.
4. $\mathbb{N}$ と濃度が等しい集合を可算集合という. 有限集合と可算集合をまとめて高々可算集合という.
5. A は B より濃度が小さい. $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $A \not\sim B$ かつ単射 $f : A \to B$ が存在する. このとき B は A より濃度が大きいという. 選択公理 (後述) を仮定すれば, A と B の濃度を比較できる.

定理 **1.** A, B を集合とする.

1. $F(A, \{0, 1\}) \sim \mathfrak{P}(A)$. ここで $F(A, \{0, 1\}) := \{f : A \to \{0, 1\} | f$ は写像 $\}$ とする.
2. $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z} \sim \mathbb{Q}$
3. $\mathbb{Q} \not\sim \mathbb{R}$. つまり $\mathbb{R}$ は可算ではない (非加算).
4. $(0, 1) \sim \mathbb{R} \sim \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
5. (カントール) $\mathfrak{P}(A) \to A$ となる単射や, $A \to \mathfrak{P}(A)$ となる全射はともに存在しない. 特に $A \not\sim \mathfrak{P}(A)$
6. (カントール・ベルンシュタイン). $f : A \to B$ なる単射と, $g : B \to A$ なる単射が存在するとき, ある全単射 $h : A \to B$ が存在する. 特に $A \sim B$.

以下, 自然数の集合を $\mathbb{N} := \{$ 自然数の集合 $\} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ とする.

問題 1. 偶数の集合 $2\mathbb{N} := \{2n | n \in \mathbb{N}\}$ とおく. 「$\mathbb{N}$ と $2\mathbb{N}$ の濃度が等しい」証明が完成するように空欄をうめよ. ただし空欄には後記の語句群から適切な語句・記号を一つ選んで記入すること.

[証明] 「$\mathbb{N}$ と $2\mathbb{N}$ の濃度が等しい」の定義は, 全単射 な写像 $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ が存在することである.

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{N} & \to & 2\mathbb{N} \\ & x & \longmapsto & 2x \end{array}$$

とおく. 任意の $y \in 2\mathbb{N}$ について, $y = 2n$ となる $n \in \mathbb{N}$ がある. よって $y = f(n)$ となるので, f は 全射 である. 一方, 任意の $a, b \in \mathbb{N}$ について, $f(a) = f(b)$ ならば $2a = 2b$ となり, $a = b$ である. よって f は 単射 である. 以上より, f は 全単射 なので, $\mathbb{N}$ と $2\mathbb{N}$ の濃度が等しい.

語句群

全射　単射　全単射

[注意] 同様にして, 奇数の集合, 整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ は $\mathbb{N}$ の濃度が等しい.

問題 2. 「有理数の集合 $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ はともに $\mathbb{N}$ と濃度が等しい」証明が完成するように空欄をうめよ．ただし空欄には後記の語句群から適切な語句・記号を一つ選んで記入すること．

[証明] $e:\mathbb{N}\hookrightarrow\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ を $n\mapsto(n,0)$ で定義すれば，e は $\boxed{\text{単射}}$ である．また

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & (x,y) & \longmapsto & 2^x(2y+1) \end{array}$$

とおくと f は $\boxed{\text{単射}}$ である．以上より $\boxed{\text{ベルンシュタインの定理}}$ から $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ への全単射が存在し，$\mathbb{N}$ と $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ の濃度は等しい．

次に包含写像 $i:\mathbb{N}\hookrightarrow\mathbb{Q}$ を考えるとこれは $\boxed{\text{単射}}$ である．また

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{Q} & \to & \mathbb{N}\times\mathbb{Z} \\ & \frac{n}{m} & \longmapsto & (m,n) \end{array}$$

とおく．ただし $\frac{n}{m}$ は既約分数で表し $m\in\mathbb{N}$ であることを約束する．すると g は $\boxed{\text{単射}}$ である．

今 $\mathbb{N}\sim\mathbb{N}\times\mathbb{N}\sim\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$ であるので，$h:\mathbb{N}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$ という $\boxed{\text{全単射 or 単射}}$ が存在する．よって $h\circ g:\mathbb{Q}\to\mathbb{N}$ は $\boxed{\text{単射}}$ である．よって $i:\mathbb{N}\hookrightarrow\mathbb{Q}$ も $h\circ g:\mathbb{Q}\to\mathbb{N}$ も $\boxed{\text{単射}}$ なので，$\boxed{\text{ベルンシュタインの定理}}$ から $\mathbb{N}$ から $\mathbb{Q}$ への全単射が存在し，$\mathbb{N}\ \boxed{\sim}\ \mathbb{Q}$ である．

語句群

全射　単射　全単射　カントールの定理　ベルンシュタインの定理 (カントール・ベルンシュタインの定理)　$\sim$　$\leq$　$\geq$

問題 3. 「$\mathbb{N}\times\mathbb{R}\sim\mathbb{R}$」の証明が完成するように空欄をうめよ．ただし空欄には後記の語句群から適切な語句・記号を一つ選んで記入すること．

[証明]. $\mathbb{N}\times\mathbb{R}\sim\mathbb{R}$ の定義は $\mathbb{N}\times\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}$ の間に $\boxed{\text{全単射}}$ が存在することである．

$\mathbb{R}\ \boxed{\sim}\ (0,1)$ であるので，全単射 $h:\mathbb{R}\to(0,1)$ が存在する．よって

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (n,x) & \longmapsto & n+h(x) \end{array}$$

とおけば f は $\boxed{\text{単射}}$ となる．

また

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{N}\times\mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & (0,x) \end{array}$$

とおけば g は $\boxed{\text{単射}}$ となる．

よって $f:\mathbb{N}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ と $g:\mathbb{R}\to\mathbb{N}\times\mathbb{R}$ はともに $\boxed{\text{単射}}$ なので，$\boxed{\text{ベルンシュタインの定理}}$ から，$\mathbb{N}\times\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}$ の間に全単射が存在する．

語句群

全射　単射　全単射　カントールの定理　ベルンシュタインの定理 (カントール・ベルンシュタインの定理)　$\sim$　$\leq$　$\geq$