3　全射・単射

学籍番号:　　　　　　　　　　名前

A, B を集合, $f: A \to B$ を写像とする.

1. $f: A \to B$ が全射 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の $b \in B$ について, ある $a \in A$ があって $b = f(a)$.
2. $f: A \to B$ が単射 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $a_1, a_2 \in A$ について, $a_1 \neq a_2$ ならば $f(a_1) \neq f(a_2)$.
   $\Longleftrightarrow$ $a_1, a_2 \in A$ について, $f(a_1) = f(a_2)$ ならば $a_1 = a_2$.
3. $1_A: A \to A$ が恒等写像 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の $a \in A$ について $1_A(a) = a$ となる写像.
4. 部分集合 $X \subset A$ について, $i: X \hookrightarrow A$ が包含写像 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の $x \in X$ について $i(x) = x \in A$ となる写像.
5. $f: A \to B$ が全単射 (1 対 1 の対応) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ f が全射かつ単射.
   $\Longleftrightarrow$ ある $g: B \to A$ があって, $g \circ f = 1_A$ かつ $f \circ g = 1_B$ が成り立つ. この g を f の逆写像といい $f^{-1}: B \to A$ で表す. (逆像の記号と同じことに注意.)

問題 1. $f: X \to Y$ を空でない集合の間の写像とし, $A \subset X$ を空でない部分集合とする. 「f が単射ならば $A = f^{-1}(f(A))$ である」の証明が完成するように空欄をうめよ. ただし空欄には後記の語句群から適切な語句・記号を一つ選んで記入すること.

[証明.] $x \in A$ について $f(x) \in f(A)$ である. これより $A \boxed{\subset} f^{-1}(f(A))$ である.

逆の包含を示す. $x \in f^{-1}(f(A))$ とする. $f(x) \in f(A)$ であるので, ある $a \in A$ があって $f(x) \boxed{=} f(a)$ である. よって f は単射なので, $x \boxed{=} a \in A$ である.

以上より f が単射ならば $A = f^{-1}(f(A))$ である.

語句群

任意の　ある　$\subset$　$\supset$　$\in$　$\notin$　$=$　$\neq$

問題 2. $f: X \to Y$ を空でない集合の間の写像とし, $B \subset Y$ を空でない部分集合とする. 「f が全射ならば $B = f(f^{-1}(B))$」の証明が完成するように空欄をうめよ. ただし空欄には後記の語句群から適切な語句・記号を一つ選んで記入すること.

[証明.] $x \in f^{-1}(B)$ ならば $f(x) \in B$ である. これより $B \boxed{\supset} f(f^{-1}(B))$ である.

逆の包含を示す. $y \in B$ とする. f が全射なので, $\boxed{\text{ある}}$ $a \in X$ があって, $y = f(a)$ となる. $f(a) = y \in B$ より $a \boxed{\in} f^{-1}(B)$ である. よって $y = f(a) \in f(f^{-1}(B))$ となる.

以上より f が全射ならば $B = f(f^{-1}(B))$ である.

語句群

任意の　ある　$\subset$　$\supset$　$\in$　$\notin$　$=$　$\neq$

問題 3. A, B, C は空でない集合とし, $f : A \to B, g : B \to C$ を写像とする． 次のうち正しい主張を全て選べ．

(1). $g \circ f$ が単射ならば f は単射.
(2). $g \circ f$ が単射ならば g は単射.
(3). $g \circ f$ が全射ならば f は全射.
(4). $g \circ f$ が全射ならば g は全射.
(5). f と g が単射ならば $g \circ f$ は単射.
(6). f と g が全射ならば $g \circ f$ は全射.
(7). f が単射で g が全射ならば, $g \circ f$ は全射.
(8). f が単射で g が全射ならば, $g \circ f$ は単射.
(9). f が全射で g が単射ならば, $g \circ f$ は単射.
(10). f が全射で g が単射ならば, $g \circ f$ は全射.

解答: (1) (4) (5) (6)

(1) ○ $f(a)=f(a') \Rightarrow g(f(a))=g(f(a')) \underset{g\circ f \text{単射}}{\Longrightarrow} a=a'$

(2) × $f : \{1\} \to \{-1,1\}$, $x \mapsto x$（全射でない） $g : \{-1,1\} \to \{1\}$, $x \mapsto x^2$（単射でない） $g\circ f : \{1\} \to \{1\}$, $1 \mapsto 1$. 全単射 が反例

(3) ×

(4) ○ $c \in C$ をとる $\Rightarrow$ $g\circ f$ 全射より $g\circ f(a)=c$ なる a がある
$\Rightarrow$ $b=f(a)$ とおくと $c=g(b)$ //

(5) ○ $g\circ f(a)=g\circ f(a') \underset{g\text{単射}}{\Longrightarrow} f(a)=f(a') \underset{f\text{単射}}{\Longrightarrow} a=a'$

(6) ○ $c\in C$ とる $\underset{g\text{全射}}{\Longrightarrow}$ $c=g(b)$ なる $b\in B$ ある $\underset{f\text{全射}}{\Longrightarrow}$ $b=f(a)$ なる $a\in A$ ある
$\Rightarrow c=g(f(a))$ //

(7) × $f : \{1\} \hookrightarrow \{1,2\}$, $1 \mapsto 1$ $g = \mathrm{id}\ \{1,2\} \to \{1,2\}$, $1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 2$ $g\circ f : \{1\} \hookrightarrow \{1,2\}$, $1 \mapsto 1$

(8) × $f=\mathrm{id} : \{1,2\} \to \{1,2\}$, $1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 2$ $g : \{1,2\} \to \{1\}$, $1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 1$ $g\circ f : \{1,2\} \to \{1\}$, $1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 1$

(9) × $f : \{1,2\} \to \{1\}$, $1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 1$ $g=\mathrm{id}\ \{1\} \to \{1\}$, $1 \mapsto 1$ $g\circ f : \{1,2\} \to \{1\}$, $1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 1$

(10) × $f=\mathrm{id}\ \{1\} \to \{1\}$, $1 \mapsto 1$ $g : \{1\} \hookrightarrow \{1,2\}$, $1 \mapsto 1$ $g\circ f\ \{1\} \hookrightarrow \{1,2\}$, $1 \mapsto 1$

反例になってる