2　集合の直積・写像・集合系の演算

A, B を集合, $a, a' \in A$, $b, b' \in B$ とする.

1. 2 つのもの a, b から作られた対 (a, b) を順序対という.
2. $(a, b) = (a', b') \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} a = a'$ かつ $b = b'$.
3. 集合の直積 $A \times B := \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$.

A, B を集合とする. $f : A \to B$ が写像 (関数) とは, 任意の $a \in A$ について, $f(a)$ という B の元を一つ対応させる規則のこととする.

1. A を f の始域 (定義域) といい, B を f の終域 (値域) という.
2. $f, g : A \to B$ を写像とする. $f = g \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の $a \in A$ について $f(a) = g(a)$.
3. $A_1 \subset A$ を部分集合とする. A_1 の f による像
$$f(A_1) := \{f(a_1) | a_1 \in A_1\} \subset B \text{ とする.}$$
4. $B_1 \subset B$ を部分集合とする. B_1 の f による逆像
$$f^{-1}(B_1) := \{a \in A | f(a) \in B_1\} \subset A \text{ とする.}$$
5. 写像 $f : A \to B, g : B \to C$ について, 合成 $g \circ f : A \to C$ を, 任意の $a \in A$ について $(g \circ f)(a) := g(f(a))$ として定義する.

X を空でない集合とする.

1. 空でない集合 Λ からある集合族 (ある集合のからなる集合) への写像 A を集合系という. もっと厳密に言えば写像
$$\begin{array}{rccc} A : & \Lambda & \to & \mathfrak{P}(X) \\ & \lambda & \longmapsto & A_\lambda \end{array}$$
を X の部分集合系という. X について言及しない場合は, 単に集合系という. 集合系を
$$(A_\lambda | \lambda \in \Lambda) \quad \text{または} \quad (A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$$
とかき, λ を添字, Λ を添字集合という.
2. 集合系 $(A_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ について, 和集合を以下で定義する.
$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda := \{a | \text{ ある } \lambda \text{ があって } a \in A_\lambda\}.$$
3. 集合系 $(A_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ について, 共通部分を以下で定義する.
$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda := \{a | \text{ 任意の } \lambda \in \Lambda \text{ について } a \in A_\lambda\}.$$

1のメモ

$f((-2,1)) = [0,4)$ $f^{-1}((-2,4)) = (-2,2)$

学籍番号: 名前 $f((-1,3)) = [0,9)$ $f^{-1}(-1,4) = (-2,2) \to f((-2,2)) = [0,4)$

$(-2,1) \cap (-1,3) = (-1,1)$ $f((-1,4)) = [0,16) \to f^{-1}([0,16)) = (-4,4)$

問題 1. 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を次で定める. $f((-1,1)) = [0,1)$

$$
\begin{array}{rccc}
f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\
 & x & \longmapsto & x^2
\end{array}
$$

(1) $f((-2,1)) \cap f((-1,3))$ を求めよ. 解答欄: $[0,4)$

(2) $f((-2,1) \cap (-1,3))$ を求めよ. 解答欄: $[0,1)$

(3) $f^{-1}((-2,4))$ を求めよ. 解答欄: $(-2,2)$

(4) $f(f^{-1}((-1,4)))$ を求めよ. 解答欄: $[0,4)$

(5) $f^{-1}f((-1,4))$ を求めよ. 解答欄: $(-4,4)$

問題 2. X, Y を空でない集合とし, $A \subset X, B \subset Y$ を空でない部分集合とする.

$$(X \times Y) \setminus (A \times B) = ((X \setminus A) \times Y) \cup (X \times (Y \setminus B))$$

の証明が完成するように空欄をうめよ. ただし空欄には後記の語句群から適切な語句・記号を一つ選んで記入すること.

[証明]. $(x,y) \in X \times Y$ について「$(x,y) \in (X \times Y) \setminus (A \times B)$ であることは $x \notin A$ [または] $y \notin B$ であることと同値」であることに注意する.

まず $(X \times Y) \setminus (A \times B) \subset ((X \setminus A) \times Y) \cup (X \times (Y \setminus B))$ を示す.

$(x,y) \in (X \times Y) \setminus (A \times B)$ とする. このとき $x \notin A$ [または] $y \notin B$ である. $x \notin A$ のときは $(x,y) \in (X \setminus A) \times Y$, $y \notin B$ のときは $(x,y) \in X \times (Y \setminus B)$ が成り立つ. よって $(x,y) \in (X \setminus A) \times Y \cup X \times (Y \setminus B)$ が言える.

次に $(X \times Y) \setminus (A \times B) \supset ((X \setminus A) \times Y) \cup (X \times (Y \setminus B))$ を示す.

$(x,y) \in (X \setminus A) \times Y$ ならば, x [$\notin$] A より, $(x,y) \in (X \times Y) \setminus (A \times B)$ である. $(x,y) \in X \times (Y \setminus B)$ ならば, y [$\notin$] B より, $(x,y) \in (X \times Y) \setminus (A \times B)$ である. よって $(x,y) \in (X \setminus A) \times Y$ [または] $(x,y) \in X \times (Y \setminus B)$ ならば $x \in (X \times Y) \setminus (A \times B)$ より言えた.

以上より $(X \times Y) \setminus (A \times B) = ((X \setminus A) \times Y) \cup (X \times (Y \setminus B))$ である.

語句群

かつ　または　任意の　ある　$\subset$　$\supset$　$\in$　$\notin$

問題 3. X を空でない集合とし X の部分集合系を $(A_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ とする. $(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^c = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c$ の証明が完成するように空欄をうめよ. ただし空欄には後記の語句群から適切な語句・記号を一つ選んで記入すること.

[証明.] まず $(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^c \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c$ を示す. $y \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ とは, 「[任意の] $\lambda \in \Lambda$ について $y \in A_\lambda$」と同値である. よって $x \in (\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^c$ ならば, $x \notin \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ より, [ある] $\lambda \in \Lambda$ があって $x \notin A_\lambda$ となる. よって $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c$ である.

次に $(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^c \supset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c$ を示す. 任意の λ について $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ [$\subset$] A_λ である. よって $(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^c$ [$\supset$] A_λ^c となる. よって λ に関して和集合をとれば $(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^c \supset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c$ となる.

以上より $(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^c = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c$ である.

語句群

かつ　または　任意の　ある　$\subset$　$\supset$　$\in$　$\notin$