1　集合と集合の演算

学籍番号:　　　　　　　　　　　名前

”集合”とは”ある特定の性質を備えたものの集まり”とする．以下 X, A, B を集合とする．

1. $a \in A \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} a$ は A の元である．$a \notin A \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} a$ は A の元ではない．
2. $A \subset B \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} a \in A$ ならば $a \in B$.
3. 空集合 $\varnothing$ とは元を一つも含まない集合．いかなる集合 A についても $\varnothing \subset A$.
4. ベキ集合 $\mathfrak{P}(A) := \{Y \subset A | Y$ は集合 $\}$.
5. 和集合 $A \cup B := \{x | x \in A$ または $x \in B\}$.
6. 共通部分 (共通集合, 交差)$A \cap B := \{x | x \in A$ かつ $x \in B\}$.
7. 差集合 $A \setminus B := \{x | x \in A$ かつ $x \notin B\}$.
8. $A \subset X$ について, 補集合 $A^c := \{x \in X | x \notin A\}$.

ド・モルガン (De Morgan, 1806-1871) の法則.

$$X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B) \quad X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B).$$

補集合の言葉で言うなら $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

問題 1. 「集合 A, B について $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ である.」の証明が完成するように空欄をうめよ．ただし空欄には後記の語句群から適切な語句・記号を一つ選んで記入すること.

[証明.]

まず $A \subset (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ を示す．$x \in A$ とする．$x \notin B$ ならば $x \in \boxed{A \setminus B}$ である．$x \in B$ ならば, $x \in \boxed{A \cap B}$ である．よって, $x \in A \setminus B$ または $x \in A \cap B$ が成り立つので, $A \subset (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ である.

次に $(A \setminus B) \cup (A \cap B) \subset A$ を示す．$x \in (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ とする．$x \in A \setminus B$ $\boxed{\text{または}}$ $x \in A \cap B$ である．$x \in A \setminus B$ ならば, $A \setminus B \boxed{\subset} A$ なので $x \in A$ である．$x \in A \cap B$ ならば $A \cap B \boxed{\subset} A$ なので $x \in A$ である．よって $(A \setminus B) \cup (A \cap B) \subset A$ である.

これより $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ である.

語句群

かつ　または　$\subset$　$\supset$　$\in$　$\notin$　A　B　$A \setminus B$　$A \cap B$　$A \cup B$

[注意] 今回は演習のためにこのように丁寧に書いているが, 試験等で行う証明においてはもう少し簡略して書いて良い. (上は丁寧に書きすぎてわかりづらい.)

問題 2. $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$ の証明が完成するように空欄をうめよ．ただし空欄には後記の語句群から適切な語句・記号を一つ選んで記入すること．

[証明.] $A \setminus B$ $\boxed{\subset}$ A であるので，$(A \setminus B) \cup B \subset A \cup B$ が言える．よって逆の包含を示す．

$x \in A \cup B$ とする．x $\boxed{\notin}$ B ならば，$x \in A$ であるので，$x \in A \setminus B$．よって $x \in (A \setminus B) \cup B$
$x \in B$ ならば定義から $x \in (A \setminus B) \cup B$．以上より $(A \setminus B) \cup B \supset A \cup B$ である．

これより $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$ である．

語句群

かつ　または　$\subset$　$\supset$　$\in$　$\notin$　A　B　$A \setminus B$　$A \cap B$　$A \cup B$

問題 3. $A = \{2, 4, \{4, 5\}\}$ とする．次のうち正しい主張を全て選べ．

(1). $\{4, 5\} \in A$
(2). $\{4, 5\} \subset A$
(3). $\{\{4, 5\}\} \subset A$
(4). $4 \in \{\{4, 5\}\} \cap A$
(5). $2 \in A$
(6). $2 \in \{\{a\} | a \in A\}$
(7). $\{5\} \in A$
(8). $\{4\} \subset A$
(9). $\{4\} \in \{\{a\} | a \in A\}$
(10). $\{2\} \cup \{\{2, 4\}\} \subset A$

理由
(1) $\{4,5\} \in A$ ○
(2) $5 \notin A$ ×
(3) $\{4,5\} \in A$ ○
(4) $4 \notin \{\{4,5\}\}$ ×
(5) $2 \in A$ ○
(6) $\{\{a\} | a \in A\} = \{\{2\}, \{4\}, \{\{4,5\}\}\}$ ×
$2 \notin \{\{a\} | a \in A\}$
(7) $\{5\} \notin A$ ×
(8) $4 \in A$ ○
(9) $\{4\} \in \{\{a\} | a \in A\}$ ○
(10) $\{2,4\} \notin A$. ×

解答: (1), (3), (5), (8), (9)

問題 4. $A = \{1, \{1\}, \text{岩井}\}$ とする．ベキ集合 $\mathfrak{P}(A)$ の元を全て列挙せよ．ただし $1 \neq$ 岩井 かつ $\{1\} \neq$ 岩井 を仮定して良い．[2]

ϕ　$\{1\}$, $\{\{1\}\}$　$\{\text{岩井}\}$

解答: $\{1, \{1\}\}$, $\{1, \text{岩井}\}$, $\{\{1\}, \text{岩井}\}$, $\{1, \{1\}, \text{岩井}\}$

8コ
↑
2^3コ

[2] 当初「$1 \neq$ 岩井 かつ $\{1\} \neq$ 岩井」を証明しようとしたが，証明できなかった．「1 も岩井も集合ではないから自明でしょ」と思われるが，自然数 1 は集合を用いて構成し集合である (応用問題の順序数の部分を参照のこと)．$1 = 0.9999\ldots$ の例のように，「いろいろとこねくり回して岩井を構成したのちに $1 =$ 岩井 になる可能性」が否定できない．