2 (1) $\inf(0, U, A) = \inf_{x\in\mathbb{R}} \sqrt{1+x^2} = 1.$

(2) $d(A,B) \le d((n,0),(n,\frac{1}{n})) = \frac{1}{n}$　$n\to\infty$ する.

(3) $d((\sqrt{2},1), \mathbb{Q}^2) \le d((\sqrt{2},1),(a_n,1)) = |\sqrt{2}-a_n| \to 0$　$n\to\infty$

($a_n \to \sqrt{2}$ なる $a_n \in \mathbb{Q}$ をとる)

(4) $d(\mathbb{R}^2-\mathbb{Q}^2, \mathbb{Q}^2) \le d((\sqrt{2},\sqrt{2}),(a_n,a_n)) = \sqrt{(\sqrt{2}-a_n)^2+(\sqrt{2}-a_n)^2} \to 0$　$n\to\infty$

3 (1)(2) $d(x,y) \underset{\text{①}}{\le} d_1(x,y) \underset{\text{②}}{\le} \sqrt{2}\, d(x,y)$

$(|a|^2+|b|^2 \le (|a|+|b|)^2)$　$(|a|+|b|)^2 \le 2|a|^2+2|b|^2$ コーシーシュワルツ

$\Longrightarrow$ (1), (2) は連続

(3) $(\mathbb{R}, d_\delta)$ においては いかなる集合も開

$\Longrightarrow$ $f^{-1}(\{0\})$ が $(\mathbb{R}, d)$ で開でない

(4) (3) 同

(5) $\forall\varepsilon>0$, $\delta=\varepsilon$,

$d(f,g)=\sup|f-g|<\delta$

$\Longrightarrow |f(\frac{1}{2})-g(\frac{1}{2})| \le d(f,g) < \varepsilon$

(6) 1つめ　f が $x=a$ で連続でない

$\Longleftrightarrow \exists\varepsilon>0, \forall\delta>0, \exists x$, $d(x,a)<\delta$ かつ $d(f(x),f(a)) \ge \varepsilon$

よって $\varepsilon=\frac{1}{2}$, $\forall\delta>0$, $g=\frac{1}{2\delta}$ $d(g,0)<\delta$

$d(g(\frac{1}{2}),0)=1>\frac{1}{2}$.

(6) 2つめ　$F^{-1}(\{0\})$ が開でない

∵) $f\equiv 0 \in F^{-1}(\{0\})$ 開

$\Longrightarrow \exists\varepsilon>0$, $N(f,\varepsilon) \subset F^{-1}(\{0\})$

$\Longrightarrow g \equiv \frac{1}{2}\varepsilon \in N(f,\varepsilon)$ しかしそれは

$F(g) = g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\varepsilon \notin \{0\}$ に矛盾.

$g \in F^{-1}(\{0\})$

(7) $\forall\varepsilon>0$, $\delta=\varepsilon$

$d(f,g)<\delta \Longrightarrow$

$|F(f)-F(g)| \le |\int f-g\,dx| \le \int|f-g|dx$

$\le \sup|f-g|$

$= d(f,g) < \varepsilon$

(8) $g\in C[0,1]$ で F は連続を示す

$M = \sup_{x\in[0,1]}|g|$ とおく.

$\forall\varepsilon>0$, $\delta = \varepsilon\cdot\min\{\frac{1}{2M+1}, 1\}$ とすると $d(f,g)<\delta$ ならば

$|F(f)-F(g)| = |\int f^2-g^2\,dx| = |\int(f-g)(f+g)dx|$

$\le \int|f-g|\,|f+g|dx$

$< \delta\cdot(2M+\delta) \le \delta\cdot(2M+1)$

$= \varepsilon\cdot\frac{2M+1}{2M+1} = \varepsilon$

開集合と同様, 連続についても一般の位相空間 (後期の授業の内容) で定義できる. これは上の条件の (2) を用いる.

問題 1. 「A を距離空間 (X,d) の部分集合とし, $f: X \to \mathbb{R}$ を $f(x) = d(x,A) := \inf_{y\in A} d(x,y)$ で定めると f は連続である」この主張の証明が完成するように空欄をうめよ. ただし空欄には後記の語句群から適切な語句・記号を一つ選んで記入すること. また $\mathbb{R}$ にはユークリッド距離を入れる.

[証明.]　教科書の定理から, $x, y \in X$ について.

$$|f(x)-f(y)| = |d(x,A)-d(y,A)| \le d(x,y)$$

であることに注意する.

f が $\boxed{\text{任意の}}$ $a\in X$ で連続を示す. $a \in X$ とする. $\boxed{\text{任意の}}$ $\varepsilon>0$ について, $\delta = \boxed{\varepsilon}$ とおくと, $d(x,a)<\delta$ ならば

$$|f(x)-f(a)| \le d(x,a) < \varepsilon$$

となる. よって f が a で連続でありいえた.

語句群

ある　任意の　δ　N　ε　2ε　x　$2x$　$f(x)$　$f(a)$

[6] ただ近傍系は開集合よりも重要度が低い気がする. 私は位相の演習を 2 回ほどやったが, 近傍系の定義は忘れていた.

(8) での δ のとりかた　$d(f,g)<\delta$ ただし.　$\sup|f+g| = \sup|(f-g)+2g| \le \sup|f-g| + \sup 2|g| = d(f,g)+2M$

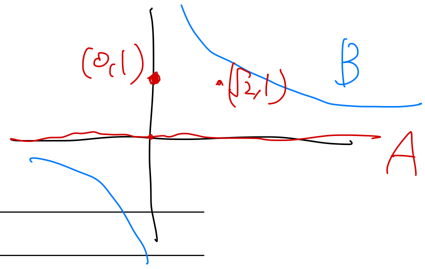
$< \delta+2M$

$\Longrightarrow |F(f)-F(g)| < \delta(2M+\delta)$. よって $(2M+\delta)\delta < \varepsilon$ となるように δ をとるとこのようになる.

解説はうら

問題 2. d を $\mathbb{R}^2$ のユークリッド距離とする．部分集合 $Y \subset \mathbb{R}^2$ と $x \in \mathbb{R}^2$ について $d(x, Y) := \inf_{y \in Y} d(x, y)$ と定め，$X, Y \subset \mathbb{R}^2$ という部分集合について，$d(X, Y) = \inf_{x \in X} d(x, Y)$ として定める．

$$A = \{(x, 0) | x \in \mathbb{R}\} \quad B = \{(x, \frac{1}{x}) | x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$$



について以下の値を求めよ．(ただし $(0,1), (\sqrt{2}, 1) \in \mathbb{R}^2$ である．)

(1) $d((0,1), A)$ 解答欄: 1

(2) $d(A, B)$ 解答欄: 0

(3) $d((\sqrt{2}, 1), \mathbb{Q}^2)$ 解答欄: 0

(4) $d(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2, \mathbb{Q}^2)$ 解答欄: 0

問題 3. 次の距離と空間を定義する．

1. $\mathbb{R}^n$ について d をユークリッド距離とする．
2. $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して，

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

とおく．d_1 はマンハッタン距離と呼ばれる．

3. $\mathbb{R}^n$ について d_δ を

$$d_\delta(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \text{ のとき} \\ 1 & x \neq y \text{ のとき} \end{cases} \tag{1}$$

とおく．d_δ は離散距離と呼ばれる．

4. $C[0,1] := \{f |\ f \text{ は } [0,1] \text{ 上の実数値連続関数}\}$ とし $f, g \in C[0,1]$ について

$$d_\infty(f, g) := \sup_{x \in [0,1]} \{|f(x) - g(x)|\}$$

と定める．$(C[0,1], d_\infty)$ は距離空間となる．

以下の写像が"連続"か"連続でない"かを判定せよ．

(1) $F : (\mathbb{R}^2, d) \to (\mathbb{R}^2, d_1); (x, y) \mapsto (x, y)$ 解答欄: 連続

(2) $F : (\mathbb{R}^2, d_1) \to (\mathbb{R}^2, d); (x, y) \mapsto (x, y)$ 解答欄: 連続

(3) $F : (\mathbb{R}^2, d) \to (\mathbb{R}^2, d_\delta); (x, y) \mapsto (x, y)$ 解答欄: 連続でない

(4) $F : (\mathbb{R}^2, d_\delta) \to (\mathbb{R}^2, d); (x, y) \mapsto (x, y)$ 解答欄: 連続

(5) $F : (C[0,1], d_\infty) \to (\mathbb{R}, d); f \mapsto f(\frac{1}{2})$ 解答欄: 連続

(6) $F : (C[0,1], d_\infty) \to (\mathbb{R}, d_\delta); f \mapsto f(\frac{1}{2})$ 解答欄: 連続でない

(7) $F : (C[0,1], d_\infty) \to (\mathbb{R}, d); f \mapsto \int_{[0,1]} f dx$ 解答欄: 連続

(8) $F : (C[0,1], d_\infty) \to (\mathbb{R}, d); f \mapsto \int_{[0,1]} f^2 dx$ 解答欄: 連続

ここで $F : (\mathbb{R}^2, d) \to (\mathbb{R}^2, d_1); (x, y) \mapsto (x, y)$ とは次の略記である．

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \longmapsto & (x, y) \end{array}$$

また $F : (\mathbb{R}^2, d) \to (\mathbb{R}^2, d_1)$ が連続とは，「F が距離空間 $(\mathbb{R}^2, d)$ から距離空間 $(\mathbb{R}^2, d_1)$ への連続」であることを意味する．(特に任意の $(x, y) \in (\mathbb{R}^2, d)$ で F が連続であることを要請する．)