# 10　距離空間の定義

学籍番号:　　　　　　　　　　　名前

空でない集合 $X$ と実数値関数 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ に関して，次の条件を満たすとき $(X, d)$ は距離空間であるという．

1. 任意の $x, y \in X$ について $d(x,y) \geqq 0$. $d(x,y) = 0$ であることと $x = y$ は同値.
2. 任意の $x, y \in X$ について $d(x,y) = d(y,x)$.
3. (三角不等式) 任意の $x, y, z \in X$ について $d(x,z) \leqq d(x,y) + d(y,z)$.

・各点収束　$\forall x \in [0,1], \forall \varepsilon > 0, \exists N, N < n \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$

・一様収束　$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \ N < n \Rightarrow \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$

$\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall x \in [0,1]\ N < n \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$

ちなみに

(a) $\Leftarrow$ $\exists x, f_n(x) = f(x)$.

(c) $\Leftarrow$ $\exists N, N < n \Rightarrow f_n = f$.

(d) $\Leftarrow$ 「$\forall x \in [0,1], \exists N, N < n \Rightarrow f_n(x) = f(x)$」

(d) $\Rightarrow$ (b) だが逆はダメ　$f_n(x) = \frac{1}{n}$, $f(x) = 1$ だと (b) OK だが (d) はダメ.

問題 1.「$(X, d)$ を距離空間とする．部分集合 $A, B \subset X$ について $(A \cap B)^i = A^i \cap B^i$ が成り立つ」この主張の証明が完成するように空欄をうめよ．ただし空欄には後記の語句群から適切な語句・記号を一つ選んで記入すること．

[証明.]　$A \cap B \subset A$ ならば $(A \cap B)^i \subset A^i$ である．よって $(A \cap B)^i \subset A^i \cap B^i$ である．

逆向きの包含を示す．$x \in A^i \cap B^i$ とする．$x \in A^i$ より，[ ある ] $\varepsilon_1$ があって $N(x, \varepsilon_1) \subset A$ となる．同様に $x \in B^i$ より，[ ある ] $\varepsilon_2$ があって $N(x, \varepsilon_2) \subset B$ となる．よって $\varepsilon :=$ [ $\min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ ] とおくと $N(x, \varepsilon) \subset A \cap B$ となるので，$x \in (A \cap B)^i$ となる．よって $(A \cap B)^i = A^i \cap B^i$ である．

**語句群**

ある　　任意の　　$\max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$　　$\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$　　$\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}$

(裏に解説あり)

問題 2. $C[0,1] := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f$ は実数値連続関数 $\}$ とおく. $f_n \in C[0,1]$ となる関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $f \in C[0,1]$ について以下の定義 (a)~(e) を考える.

**定義**

(a). 任意の $\varepsilon > 0$ と任意の $N$ について, ある $x \in [0,1]$ があって, $N < n$ ならば $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.
(b). 任意の $x \in [0,1]$ と任意の $\varepsilon > 0$ について, ある $N$ があって, $N < n$ ならば $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.
(c). ある $N$ があって, 任意の $\varepsilon > 0$ と任意の $x \in [0,1]$ について, $N < n$ ならば $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.
(d). 任意の $x \in [0,1]$ について, ある $N$ があって, 任意の $\varepsilon > 0$ について, $N < n$ ならば $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.
(e). 任意の $\varepsilon > 0$ について, ある $N$ があって, 任意の $x \in [0,1]$ について, $N < n$ ならば $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

(1). 「関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $f \in C[0,1]$ に各点収束する」の定義を表すものを (a)~(e) の中から選べ.
(2). 「関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $f \in C[0,1]$ に一様収束する」の定義を表すものを (a)~(e) の中から選べ.

解答欄: (1). (b)　(2). (e)

問題 3. 「$C[0,1] := \{f \mid f$ は $[0,1]$ 上の実数値連続関数 $\}$ とし $f, g \in C[0,1]$ について

$$d_\infty(f,g) := \sup_{x\in[0,1]} \{|f(x) - g(x)|\}$$

と定める. このとき $(C[0,1], d_\infty)$ が距離空間である.」この主張の証明が完成するように空欄をうめよ. ただし空欄には後記の語句群から適切な語句・記号を一つ選んで記入すること.

[証明.]　$[0,1]$ 上の連続関数は 最大 値をもつので, $d(f,g)$ は well-defined である.(つまり $d(f,g)$ が存在しないことはない.) $(C[0,1], d_\infty)$ が距離空間の定義 1-3 を満たすことを示す.

(1). $f, g \in C[0,1]$ について, $\sup_{x\in[0,1]}\{|f(x) - g(x)|\} \boxed{\geq} 0$ である. よって $d(f,g) \geq 0$ となる. また $d(f,g) = 0$ を仮定する. 任意の $x \in [0,1]$ について

$$|f(x) - g(x)| \boxed{\leq} \sup_{x\in[0,1]} \{|f(x) - g(x)|\} = d(f,g) = 0$$

となり, $f(x) - g(x) = 0$ である. よって.$f = g$ となる.

(2) $d(f,g) = d(g,f)$ を示す. 任意の $x \in [0,1]$ について $|f(x) - g(x)| = |g(x) - f(x)| \leq d(g,f)$ である. よって左辺を $x$ に関して sup を取れば

$$d(f,g) \boxed{=} \sup_{x\in[0,1]} \{|f(x) - g(x)|\} \leq d(g,f)$$

である. 同様にして $d(g,f) \leq d(f,g)$ が言える.

(3). 三角不等式 $d(f,h) \boxed{\leq} d(f,g) + d(g,h)$ を示す. 任意の $x \in [0,1]$ について

$$|f(x)-h(x)| \leq |f(x)-g(x)|+|g(x)-h(x)| \leq \sup_{x\in[0,1]}\{|f(x)-g(x)|\}+\sup_{x\in[0,1]}\{|g(x)-h(x)|\} = d(f,g)+d(g,h)$$

となる. よって左辺を $x$ に関して sup を取れば $d(f,h) = \sup_{x\in[0,1]}\{|f(x)-h(x)|\} \boxed{\leq} d(f,g)+d(g,h)$ となりいえた. 以上より $(C[0,1], d_\infty)$ は距離空間となる.

**語句群**

最大　最小　$\leq$　$=$　$\geq$