

7/17 演習 $\Rightarrow$ レポート2 (7/31迄)
(解答つき)

7/31 試験 (7/17に読日A)

前回 画像と核、基底

後期で詳しくやるので

今は求め方を学ぶだけで可

$W = S$

$\Rightarrow \dim$

特に V

$\Rightarrow \text{rank}$

1) $W = \text{Span}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k) \quad \vec{a}_i \in \mathbb{R}^n$
 $\Rightarrow \dim W := \text{rank}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)$
 $= \text{rank} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix}$
 $\vec{a}_1 \quad \dots \quad \vec{a}_k$

特に $\vec{b} \in W$

$\Rightarrow \text{rank}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k, \vec{b}) = \text{rank}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)$

2.8

$\vec{b} \in W$

$A = ($

$\vec{b} \in \mathbb{R}^n$

① $\vec{b}$

② $\vec{b}$

2.8 非斉次の連立1次方程式

定理 2.8 A $m \times n$ 行列

$A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ $\vec{a}_i \in \mathbb{R}^m$ とかく

$\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ について LX は同値

(1) 連立1次方程式 $A\vec{x} = \vec{b}$ の解

(2) $\vec{b} \in \text{Image } A = \{ \vec{y} \in \mathbb{R}^m \mid \vec{y} = A\vec{x}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n \}$

(3) $r = \text{rank}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n, \vec{b}) = \text{rank}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$

(注) $(1) \Leftrightarrow (2)$ 単なる言い換え

(2) $\Rightarrow$ (3) 左にかいていることから
($W = \text{Image } A$ とする)

(3) $\Rightarrow$ (2) $\text{Image } A = \text{Span}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r)$
($r = \dim \text{Image } A$) と基底をとる

(3) $\text{rank}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n, \vec{b}) = \text{rank}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$

(注) $(1) \Leftrightarrow (2)$ 単なる言い換え

(2) $\Rightarrow$ (3) 左にかいていることから
($W = \text{Image } A$ とする)

(3) $\Rightarrow$ (2) $\text{Image } A = \text{Span}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r)$
($r = \dim \text{Image } A$) と基底をとる

① (主と×) $Ax = b$ (連立1次) のとき

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

② $Ax = b$ (A係数行列) から
 $[A \mid b]$ (拡大係数行列) を
 作る

② $[A \mid b] \xrightarrow{\text{簡約化}} [C \mid d]$ とする。

③ $Cx = d$ をとく。

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 2 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 5 \end{cases}$$

解 ①

② 簡約

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

① $[A:b] = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 2 & 5 \end{array} \right)$

② 簡約化する
 $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$

③ C

③ $Cx' = d'$ と s, t

つまみ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 2 \\ x_3 - x_4 = 1 \\ x_5 = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 + 2s - 3t \\ x_2 = s \\ x_3 = 1 + t \\ x_4 = t \\ x_5 = 1 \end{cases} \quad (s, t) \text{ 任意}$

$$\boxed{1512} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 5 \\ 4x_1 + 13x_2 + 5x_3 + x_4 = 2 \\ x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \end{array} \right.$$

が解をもつような a の値を求め

$$\boxed{\text{Ans}} \text{ (i) } (A \mid b) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & -2 & 5 \\ 4 & 13 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

(2) 簡約化 $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 10 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-6 \end{pmatrix}$

③ $C\vec{x} = \vec{d}$ として
 $-x_3 + 10x_4 = -19$

$$x_2 + x_3 - 3x_4 = 6$$

$$0 = 1 - 6$$

つまり $a \neq 6$ なら $0 \neq a-6$ より解なし
($a=1 \Rightarrow 0=-5$ 矛盾)

$$a = 6 \text{ ㎝}$$

$$\text{解} \quad \begin{cases} x_1 = -19 + 2s - 10t \\ x_2 = 6 - s + 3t \\ x_3 = s \\ x_4 = t \end{cases} \quad (s, t \text{ 任意})$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

③ 行列式

1行1列 $A = (\vec{a}_1)$ $n \times n$ 行列

6 1行1列 $\det A \in \mathbb{R}$

なし "符号つき体積" (A^{-1} がある)

成り立つ $\begin{cases} \det A \neq 0 \Leftrightarrow A \text{ が正則} \\ \det(AB) = \det A \times \det B \end{cases}$

④ 性質 (A の成分は $\mathbb{R}$ とする)

$\det: \{n\text{-次正方行列}\} \rightarrow \mathbb{R}$

$A \mapsto \mathbb{R}$

n -次をみたすものがある

① $\det(E_n) = 1$

② $\det(\lambda \vec{a}_1 + \mu \vec{b}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$

$= \lambda \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) + \mu \det(\vec{b}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$

($\vec{a}_2 \sim \vec{a}_n \neq \vec{0}$)

$$\begin{aligned}
 & \textcircled{3} \det(\vec{a}_1, \vec{a}_j, \vec{a}_{i_2}, \dots, \vec{a}_n) \\
 &= -\det(\vec{a}_1, \vec{a}_{i_2}, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_n) \\
 & (A = (\underbrace{\vec{a}_1}_{\mathbb{R}^n}, \underbrace{\vec{a}_2}_{\mathbb{R}^n}, \dots, \vec{a}_n)) \text{ と表わす} \\
 & \text{よって } \det A \text{ は } A \text{ の行の列の交換} \\
 & \det A \text{ と } |A| \text{ と } |A| \text{ と } |A|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \textcircled{1} \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \\
 & \textcircled{2} \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \text{ と表わす} \\
 & \textcircled{3} \det(\lambda \vec{a}_1 + \mu \vec{b}_1, \vec{a}_2) \\
 & \left(\begin{array}{l} \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \\ \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} \end{array} \right) \\
 & \det \begin{pmatrix} \lambda a_{11} + \mu b_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} + \mu b_{21} & a_{22} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \vec{a}_2) \det(\lambda \vec{a}_1 + \mu \vec{b}_1, \vec{a}_2) \\
 & = (\lambda a_{11} + \mu b_{11}) a_{22} - (\lambda a_{21} + \mu b_{21}) a_{12} \\
 & = \dots = \lambda \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \mu \det \begin{pmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\
 & = \lambda \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2) + \mu \det(\vec{b}_1, \vec{a}_2) \\
 & \textcircled{3} \det(\vec{a}_2, \vec{a}_1) \\
 & = \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{11} \\ a_{22} & a_{12} \end{pmatrix} = a_{21} a_{12} - a_{11} a_{22} \\
 & = -\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \textcircled{1511} \quad n=3 \\
 & \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} \text{「サラスの」} \\ \text{「公式」} \\ \text{「を」} \end{array} \right) \\
 & = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} \\
 & \quad + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{11} a_{23} a_{32} \\
 & \quad - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31} \\
 & \textcircled{1511} \quad \textcircled{1} \sim \textcircled{3} \text{ をみたす}
 \end{aligned}$$

定理 $f: \{n\text{-row square matrices}\} \rightarrow \mathbb{R}$
 that maps $A \mapsto f(A)$

① $f(\lambda \vec{a}_1 + \mu \vec{b}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$
 $= \lambda f(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) + \mu f(\vec{b}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$
 ($\vec{a}_2 \sim \vec{a}_n \neq \vec{0}$) (行列式の性質)

② $f(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_j, \vec{a}_i, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_n)$
 $= -f(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_i, \vec{a}_j, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_n)$ (行列式の性質)

③ $f(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_i, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_n) = 0$ (行列式の性質)

④ $f(A) = f(E_n) \cdot \det A$

⑤ $f(A) = \det A$

⑥ $f(A) = \det A$

⑦ $f(A) = \det A$

⑧ $f(A) = \det A$

⑨ $f(A) = \det A$

⑩ $f(A) = \det A$

⑪ $f(A) = \det A$

⑫ $f(A) = \det A$

⑬ $f(A) = \det A$

⑭ $f(A) = \det A$

⑮ $f(A) = \det A$

⑯ $f(A) = \det A$

⑰ $f(A) = \det A$

⑱ $f(A) = \det A$

⑲ $f(A) = \det A$

⑳ $f(A) = \det A$

㉑ $f(A) = \det A$

㉒ $f(A) = \det A$

㉓ $f(A) = \det A$

㉔ $f(A) = \det A$

㉕ $f(A) = \det A$

㉖ $f(A) = \det A$

㉗ $f(A) = \det A$

㉘ $f(A) = \det A$

㉙ $f(A) = \det A$

㉚ $f(A) = \det A$

㉛ $f(A) = \det A$

㉜ $f(A) = \det A$

㉝ $f(A) = \det A$

㉞ $f(A) = \det A$

㉟ $f(A) = \det A$

㊱ $f(A) = \det A$

㊲ $f(A) = \det A$

㊳ $f(A) = \det A$

㊴ $f(A) = \det A$

㊵ $f(A) = \det A$

㊶ $f(A) = \det A$

㊷ $f(A) = \det A$

㊸ $f(A) = \det A$

㊹ $f(A) = \det A$

㊺ $f(A) = \det A$

㊻ $f(A) = \det A$

㊼ $f(A) = \det A$

㊽ $f(A) = \det A$

㊾ $f(A) = \det A$

㊿ $f(A) = \det A$

これだと「行列式がある意味から」
行列式の計算方法 分かる

④
 ⑤

① 命題 ①ある列を λ 倍すると
 行列式も λ 倍

② 等しい列があれば $\det = 0$

③ ある列の λ から $-\lambda$ 倍を他の列に
 くわえても行列式は変わらない

④ $\vec{a}_i = \vec{0}$ なる列があれば $\det = 0$

⑤ $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$

$\det$

① $\det(\lambda \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) = \lambda \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$

$= 0$ ② $\det(\vec{a}_1, \vec{a}_1, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n) = 0$

$1 =$ ③ $\det(\vec{a}_1 + \lambda \vec{a}_2, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) = \det(A)$

④ $\det(0, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) = 0$

証明 ① 行列式の規則 ② 2
 $\mu = 0$ とする。

$$\textcircled{2} \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_n)$$

$$= -\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_n)$$

$$\textcircled{3} (\lambda = -\lambda \text{ と } \lambda_2, \lambda_3 \Rightarrow \lambda = 0)$$

③ 上の①と②より (規則②を使う)

④ 行列式の規則 ② 2

$$\det(\vec{0}, \dots, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) = \det(2 \cdot \vec{0}, \dots, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$$

$$\textcircled{5} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\det(\vec{0}, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$$

$$= \det(2 \cdot \vec{0}, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) = 2 \det(\vec{0}, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$$

$$(\lambda = 2\lambda \text{ の解 } \Rightarrow \lambda = 0)$$

$$\textcircled{5} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$a_{11} = 0 \Rightarrow \det = 0$$

$$a_{11} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{①} \quad \det(F_{i\lambda}) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix} \\
 & \quad \quad \quad = a_{11} \cdots a_{nn} \quad \left(\begin{array}{l} \text{行列式} \\ \text{規則より} \end{array} \right) \\
 \hline
 & \text{系 134} \quad \det(F_{i\lambda}) = \det({}^t F_{i\lambda}) = \lambda \\
 & \quad \quad \quad \text{すなわち } F_{i\lambda} \text{ は基本行列 (各行を } \lambda \text{ 倍した基底)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{②} \quad \det(G_{ij}) = \det(G_{ij}) = -1 \\
 & \text{③} \quad \det(H_{ij}) = \det({}^t H_{ij}) = 1 \\
 & \text{④} \quad F_{i\lambda} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \lambda & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det = \lambda \quad (\text{前問の ⑤}) \\
 & \quad \quad G_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det = -1 \\
 & \quad \quad H_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det = 1
 \end{aligned}$$

定理136 (教科書命題34)

① $\det^t A = \det A$

重要

② ある行を λ 倍すると
行列式は λ 倍

基本変換
① ~ ③で
行列式は
左側が
かわる

③ 2つの行を1本かき
行列式は -1 倍

④ ある行の λ 倍を

他の

$\det(A)$

$\det$

$\det$

他の行に1を足すと行列式は不変

$\det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$(2 \ 4) = 2 \times (1 \ 2)$

$\det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$\det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

①

系

二