

土曜 - 日 (6/19) (休) 23:59
 来週 (6/26) 休 三基

(例) $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$

$$W = \text{Span}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k) = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i \vec{a}_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{rank}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k) = \max_{1 \leq p \leq k} \left\{ p \mid \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p \text{ は 1-次独立} \right\}$$

$$\dim W = \dim \text{Span}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k) = \text{rank}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)$$

$(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p)$ は W の基底

$\Leftrightarrow p = \dim W$ かつ $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p)$ は 1-次独立

(例)

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$W = \text{Span}$$

$$= \left\{ \right.$$

$$\text{rank}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)$$

$$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$$

$$\Rightarrow$$

(例) $\mathbb{R}^2$ に于いて

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$W = \text{Span}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_4) = \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{rank}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_4) = 1$$

$$\vec{a}_1 \text{ は 1-次独立} \Rightarrow \text{rank} \geq 1$$

$$\Rightarrow \text{rank} = 1$$

$\dim$

W の

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^2$ の

基底

基底

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\dim W = \text{rank}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k) = 1 \leq 2$ 2

$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ W の基底 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix} \in W$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $\vec{a}_1$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 3 必要定理 (114) $\vec{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ と $\vec{a}_i$

$\mathbb{R}^n$ $\text{rank}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k) = \text{rank} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix}$ 4 5

(左の列と行の列の交換)

2 5 2 $W = \text{Span}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)$ とし $r = \dim W$ とし $(\vec{a}_{i_1}, \dots, \vec{a}_{i_r})$ が基底となる r の基底がとれる

3 $\text{Span}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k) = \text{Span}(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_e)$
 $\Rightarrow \text{rank}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k) = \text{rank}(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_e)$

かつ次元の定義は $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)$ の取り方に よらない

4 $\dim \mathbb{R}^n = n$

5 $W \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow \dim W \leq n$

5 $W \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow \dim W \leq n$

証明 $p = \text{rank}(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_p)$ とする

$\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_p$ 1-次独立 により

B は A の 簡約化 とする

「 $x_1 \bar{a}_1 + \dots + x_p \bar{a}_p = \bar{0}$ 」を考察する

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = 0 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2p}x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{np}x_p = 0 \end{cases}$$

「 $\frac{1}{p}$ 」

「 $\frac{1}{p}$ 」

よって $B =$

rank

「 $\frac{1}{p}$ 」

「 $\frac{1}{p}$ 」

$(a_1, \dots, a_{p+1})$

$\Rightarrow C =$

「 $\frac{1}{p}$ 」の方程式の解は $x_1 = \dots = x_p = 0$ のみ

よって $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ の形になる

$$\text{rank } B = \text{rank } A \geq p$$

「 $\frac{1}{p}$ 」「 $\frac{1}{p}$ 」 $x_1 \bar{a}_1 + \dots + x_p \bar{a}_p + x_{p+1} \bar{a}_{p+1} = \bar{0}$

「 $\frac{1}{p}$ 」の解は $x_1 = \dots = x_p = x_{p+1} = 0$ 以外に
 $(a_1, \dots, a_{p+1})$ 1-次従属

$\Rightarrow C = 0$ になることはない $\Rightarrow \text{rank } B = p$

(2) 左

$A =$

$(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_p)$

$B(A)$

$\frac{1}{p}$

$\frac{1}{p}$

$\frac{1}{p}$

$\frac{1}{p}$

例 (2) 左から $p = \text{rank } A$
 $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix}$ とし
 $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p)$ は 1-独立 とし
 $B(A \text{ の 第 } p+1 \text{ 列})$ は $B = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$
 外に $\vec{a}_{p+1} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_p \vec{a}_p$ とする
 $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ は 任意の
 $\text{rank } k$ には $\text{Span}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k) = \text{Span}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p)$

$\vec{a}_{p+1} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_p \vec{a}_p + \lambda_{p+1} \vec{a}_{p+1} = \vec{0}$
 $\vec{a}_{p+1} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_p \vec{a}_p$ の解に
 $B \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ の
 $\begin{cases} \lambda_1 = \dots = \lambda_{p+1} \\ \vdots \\ \lambda_{n+1} = \dots = \lambda_{p+1} \end{cases}$ の解に
 $\lambda_1 = \dots = \lambda_{p+1}$

$\text{rank}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p)$
 $= \text{rank}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k)$
 $= \text{rank}(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k)$
 $\oplus$ t, t
 $W = \text{Span}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)$
 $\Rightarrow \dim W = \text{rank}(A)$ $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)$
 $\Rightarrow \text{rank}(A) \leq n$

$\boxed{A}$ $\mathbb{R}^2$
 $W = \text{Span}(\dots)$
 $\dim W = \text{rank}(A)$
 $\boxed{\text{補題1}}$
 $\boxed{\text{補題1}}$
 $W_n = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$
 ± 1

$\boxed{A}$ $\mathbb{R}^2$ $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$
 $W = \text{Span}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ $\dim W$
 $\dim W = \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
 $\boxed{\text{補題1}} = \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = 2$
 $W_n = (\vec{a}_1, \vec{a}_2)$
 ± 1

$A =$
 $f(A)$

線形写像の像と核

定義 $A: m \times n$ 行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{pmatrix}$$

$f_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
 $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ とする

① A の像 (Image)
 $\text{Image } A = \{ \vec{y} \in \mathbb{R}^m \mid \vec{y} = A\vec{x} \text{ なる } \vec{x} \in \mathbb{R}^n \text{ が存在する} \}$

② A の核 (Kernel)
 $\text{Ker } A = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{0} \}$ とする
 ($A\vec{x} = \vec{0}$ の解の空間)

① A の像 (Image) を

$$\text{Image } A = \{ \vec{y} \in \mathbb{R}^m \mid \vec{y} = A\vec{x} \text{ なる } \vec{x} \in \mathbb{R}^n \text{ が存在する} \}$$

$\vec{a}_n$

$$= \{ \underbrace{A\vec{x}_1}_{\mathbb{R}^m} + \cdots + \underbrace{A\vec{x}_n}_{\mathbb{R}^m} \mid \vec{x}_i \in \mathbb{R}^n \}$$

② A の核 (Kernel) を

$$\text{Ker } A = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{0} \}$$

($A\vec{x} = \vec{0}$ の解の空間)

(17) $m=n=2$ $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$f_A: \mathbb{R}^{2=n} \rightarrow \mathbb{R}^{2=m}$ rank $A = 1$
 $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto A\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Image A $= \left\{ \vec{y} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ for } x_1 \in \mathbb{R} \right\}$ Ker A
 $= \left\{ \begin{pmatrix} 3x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x_1 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid y_1 \in \mathbb{R} \right\}$

f_A

$\mathbb{R}^{2=n}$

$\text{Ker } A$ 2-1=1次元

Image A

$\left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ 1次元

$\mathbb{R}^{2=m}$

$\text{Ker } A = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid A\vec{x} = 0 \right\}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} 3x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_2 \in \mathbb{R} \right\}$

① Im
の
②

像と核の求め方

例題 (2.6) $A = m \times n$ 行列.

$$f_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

B は A の簡約
行列

$$\vec{x}' \mapsto A\vec{x}'$$

① Image A は「 B の 1 が現れた位置
の元の行列の列」ではある

② $\dim(\text{Image } A) = \text{rank } A$

③ $A\vec{x}' = \vec{0}$ の解を

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = t_1 \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}}_{\vec{b}_1} + t_2 \underbrace{\begin{pmatrix} b_{12} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{pmatrix}}_{\vec{b}_2} + \dots + t_\ell \underbrace{\begin{pmatrix} b_{1\ell} \\ \vdots \\ b_{n\ell} \end{pmatrix}}_{\vec{b}_\ell}$$

$(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_\ell)$ は $\ker A$ の基底となる とわけてたとき

④ $\dim \ker A = n - \text{rank } A$

次元定理 $\dim \ker A + \dim \text{Image } A$
 $= \dim \mathbb{R}^n = n$

①の
 「Bの位置」...とは

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
 ←となるとき

$$A = (\boxed{\vec{a}_1} \vec{a}_2 \boxed{\vec{a}_3} \boxed{\vec{a}_4} \vec{a}_5)$$

$$\Rightarrow \text{Image } A = \text{Span}(\underline{\vec{a}_1}, \underline{\vec{a}_3}, \underline{\vec{a}_4})$$

まとめ
 像と核
 ① A
 ② d
 ③ 像
 (Aの位置)
 ④ dim

① ② ③ ④
 ① Aを簡約化したBをとる
 ② $\dim \text{Image } A = \text{rank } B$ ($\text{rank } A$)
 ③ 像の基底 Bの1(主成分)が基底
 (Aの位置の元の行数列の列たち(左右))
 ④ $\dim \ker A = n - \text{rank } A$

⑤ 核
 W = Sp
 Wの
 Wの基
 (A = R

⑤ 核の基底 $Bx = 0$ かい
 $x = t_1 \bar{b}_1 + \dots + t_k \bar{b}_k$ とかけるときの
 $(\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_k)$
 ⑥ $W = \text{Span}(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$ $\bar{a}_i \in \mathbb{R}^m$
 ⑦ W の次元 $= \text{rank}(A)$ $(A = (\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n))$
 ⑧ W の基底 $= \text{Imag } A$ の基底
 $(A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m)$

⑨ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} f_A: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$
 $x \mapsto Ax$
 の像と核の次元を求め
 それぞれの基底を1つ求めよ
 ⑩ A を簡約化して
 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

② $\dim \text{Image } A = \text{rank } B = 3$
 ③ $\text{Image } A$ の基底 $= (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

 ④ $\dim \ker A = n - \text{rank } B = 4 - 3 = 1$
 ⑤ $B\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $\ker A$ の基底 $= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

③ $W = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
 の次元と基底を求めよ
 ④ $\dim W = \text{rank } A = 3$
 W の基底 $= (\text{Image } A \text{ の基底})$
 $= \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$

