

レポート 9/19 23:59 しぬま

前回 A 正則 $\iff$ $AB=BA=E_n$ なる B がある ($B=A^{-1}$ なる)

すなわち $(A|E_n) \xrightarrow{\text{簡約}} (E_n|B)$ なる
なると $B=A^{-1}$

例 基本行列は正則

例 3 $A=RB$
($n \times n$)
 R 基本行列の積 R 簡約

資料 2.6.3 (教科書 25)

命題 104 A, B n 次正方行列

(1) A と B 正則 $\implies AB$ も正則

(2) A 正則, $AB=O$ なる $B=O$
(ゼロ行列)

(3) 簡約行列が正則なる
単位行列である

$$\boxed{\text{証明}} (1) C = B^{-1}A^{-1} \text{ とは、} \quad \text{単位行列}$$

$$CAB = B^{-1}A^{-1}AB = E_n$$

$$ABC = AB(B^{-1}A^{-1}) = E_n$$

$$(2) AB = O \Rightarrow A^{-1}(AB) = O$$

$$(3) \text{簡約な行列を } B \text{ とすると}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \text{ となる。}$$

$$B \text{ が単位行列でないとなと}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \text{ と下にゼロベクトルの行がある。}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ & & 1 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \text{ 例 } 4 \times 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{すると } BC = O \text{ となり(2)に矛盾}$$

判定

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

B 正則 $\Rightarrow C = 0$ 矛盾 $\Rightarrow$

定理

(A:

(1) A

単

(2) 正

(3) rank

(A

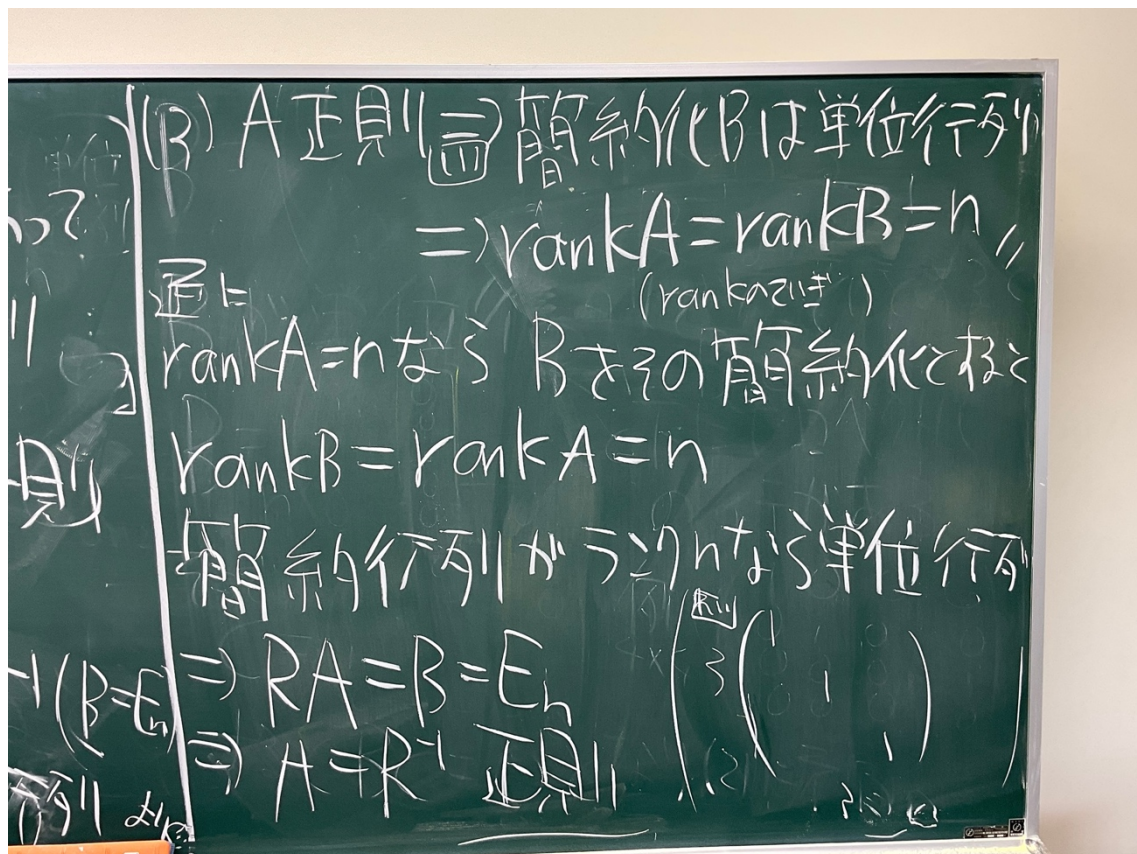
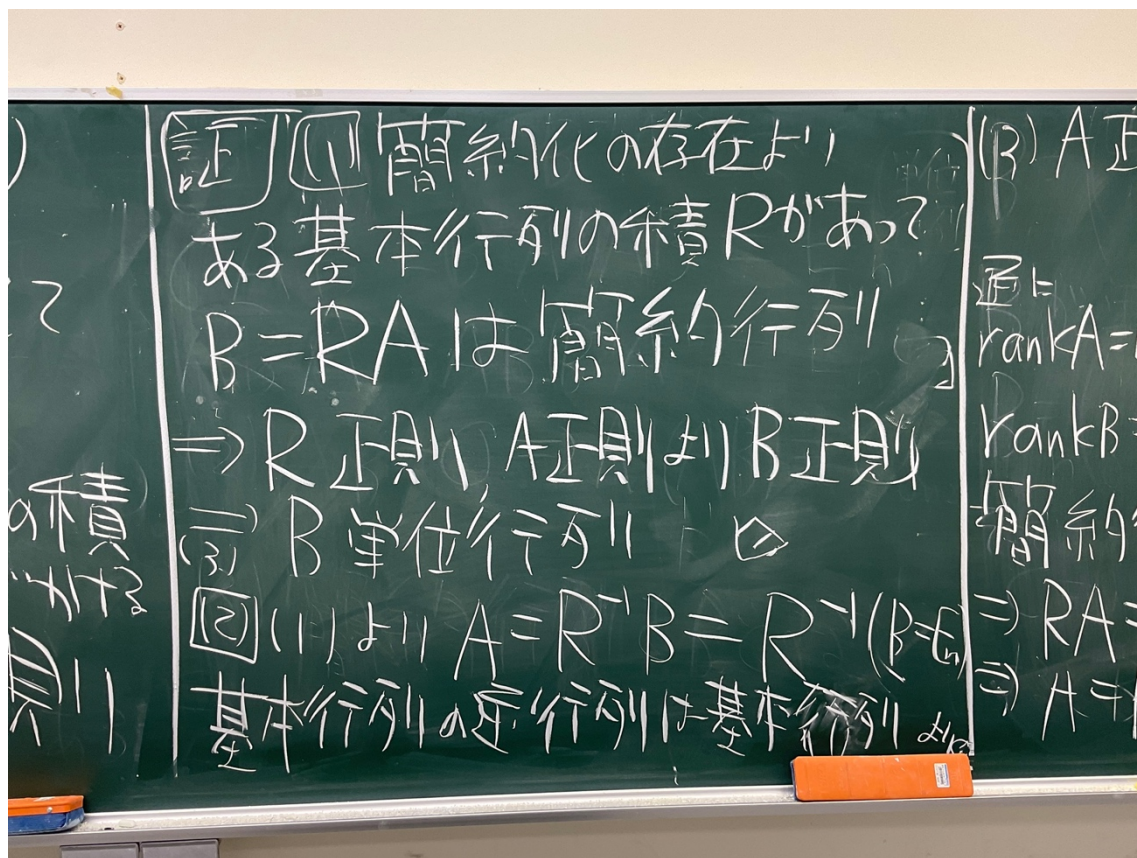
定理 105 (考採斗書定理 2.4)

(A: $n \times n$ 行列)

(1) A が正則なら基本変形をして
単位行列にできる

(2) 正則行列は基本行列の積
で表せる

(3) $\text{rank } A = n \Leftrightarrow A$ が正則
(A $n \times n$ 行列)



命題106 (教科書2.8節定義2.6) (証明)

$A = n$ -次正則行列 ($n \times n$ 行列) について R 基本行列 ($R: n \times n$) 次は同値.

(1) $AB = E_n$ なる B がある

(2) $BA = E_n$ なる B がある

(3) A は正則、つまり、

$AB = BA = E_n$ なる B がある
この時 $B = A^{-1}$

R 基本行列

も $(A$

$\Rightarrow \text{rank}$

$= \text{rank}$

$(RA)B$

$(RA)B$

6) (証明) (1) $\Rightarrow$ (3) を示す

R 基本行列の積で RA 簡約をとる

も $(A$ が正則でない $\Rightarrow \text{rank } A < n$

$\Rightarrow \text{rank } RA < n$

$\Rightarrow RA = \begin{pmatrix} * & 0 & * \\ & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる

$(RA)B = R(AB) = R E_n$

$(RA)B = E_n$

2.6.4 (定義)

例 $RA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $BR^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ $A =$

$(RA)(BR^{-1}) = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ${}^tA =$

となり単位行列にならず、
よって A は正則でない $A^{-1} = A^T(AB) = B$

2.6.4 転置行列

(定義) $m \times n$ 行列 A について

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $n \times m$

${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

$n \times m$ 行列 tA を A の転置行列とす

例 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ ${}^t A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 5 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$

${}^t({}^t A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 5 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = A$

一般に $A = (a_{ij})_{m \times n}$ とし

${}^t A = (a_{ji})_{n \times m}$

命題 $A = m \times n$ 行列

(1) ${}^t({}^t A) = A$

(2) $B = n \times l$ とし ${}^t(AB) = {}^t B \cdot {}^t A$

(3) $m = n$ かつ A 正則ならば ${}^t(A^{-1}) = ({}^t A)^{-1}$

(4) $\text{rank}({}^t A) = \text{rank } A$

$\therefore \text{rank } A \leq \min\{m, n\}$

($m \geq n$ のとき ${}^t A$ の列は n 個まで独立) ($m < n$ のとき ${}^t A$ の行は m 個まで独立)

(証明) (1) 省略
 (2) tAB の (i, k) 成分をみる

$$\begin{aligned}
 ({}^tAB)_{ik} &\stackrel{\text{def}}{=} (AB)_{ki} \\
 &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n A_{kj} \cdot B_{ji} \\
 &= \sum_{j=1}^n ({}^tB)_{ij} \cdot ({}^tA)_{jk} \\
 &= ({}^tB \cdot {}^tA)_{ik}
 \end{aligned}$$

(3) $B = {}^tA$ とおく

$$\begin{aligned}
 {}^t(A^{-1}) \cdot B &= {}^t(A^{-1}) \cdot {}^tA \stackrel{(2)}{=} {}^t(A \cdot A^{-1}) \\
 &= {}^tE_n = E_n
 \end{aligned}$$
 よって 命題頁106 より
 $B = {}^tA$ は ${}^t(A^{-1})$ の逆行列

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow ({}^tA) &= ({}^t(A^{-1}))^{-1} \\
 \Rightarrow ({}^tA)^{-1} &= {}^t(A^{-1})
 \end{aligned}$$

2.1 線形写像の像と核

練習 $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m \in \mathbb{R}^n$ について

$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$ が線形独立

$\Leftrightarrow \exists c_1 \vec{a}_1 + \dots + c_m \vec{a}_m = \vec{0}$ ならば

$$c_1 = \dots = c_m = 0$$

$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$ が線形従属

$\Leftrightarrow$ 線形独立でないこと

$$(\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \text{ 実数} \})$$

定義 (孝ノ木斗書定義 2.4)

$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$ について

$$\text{Span}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k) = \{ \lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k \mid \lambda_i \in \mathbb{R} \}$$

$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ によって生じる 線形部分空間

$W = \text{Span}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)$ ($\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ によって生じる)

$W = \text{Span}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)$ とおける集合を 線形部分空間 とする

$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ にくまれる線形独立な
 ベクトルの最大個数を 階数 (rank)
 $\text{rank}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)$ とかく. という?
 $W = \text{Span}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)$ の次元を
 $\dim W = \text{rank}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)$
と定義する
 (不慣れなとき $(W = \text{rank}(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r))$
 とかけたときどうする?)

$r = \dim W = \dim \text{Span}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)$
 $= \text{rank}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)$ とする
 r の線形独立な W の元
 $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r$ の組
 $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r\}$ を 基底 といふ
 (basis)

$$\boxed{\text{例}} \quad \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \left[\begin{array}{l} \dim \\ \dim \\ \dim \end{array} \right]$$

$$\text{Span}(\vec{e}_1) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Span}(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Span}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \mid \lambda_i \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^3$$

$$\mathbb{R}^3 \quad \dim \text{span} \vec{e}_1 = \left\{ \begin{array}{l} \{ \vec{e}_1 \} \text{ による基底形独立} \\ \text{なベクトルの最大数} \\ = 1 \end{array} \right. \quad \left(\vec{e}_1 \text{ は基底形独立} \right)$$

$$\dim \text{span} \{ \vec{e}_1, \vec{e}_2 \} = 2 \quad (\vec{e}_1, \vec{e}_2 \text{ が基底形独立})$$

$$\dim \text{span} \{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \} = 3 \quad (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \text{ が基底形独立})$$

$$\dim \mathbb{R}^3$$

$$\left(\dim \mathbb{R}^n = n \right) \quad \left(\begin{array}{l} \dim \mathbb{R}^n \\ = \dim \text{span} \{ \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n \} = n \end{array} \right)$$

$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$
 $W = \text{Span}(\vec{a}_1, \vec{a}_4)$
 $= \{ \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_4 \vec{a}_4 \in \mathbb{R}^2 \}$
 $W = \mathbb{R}^2$ である。
 $\mathbb{R}^2 \subset W$ ok
 $\mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とする。 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (y-x) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$
 $\Rightarrow \mathbb{R}^2 \subset W$

$\text{rank}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4) = 2$
 $\vec{a}_1, \vec{a}_4$ が線形独立
より $\text{rank}(\vec{a}_1, \vec{a}_4) \geq 2$
今 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ は線形従属
同様 $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4), (\vec{a}_1, \vec{a}_3, \vec{a}_4)$ も $\mathbb{R}^2$
 $(\vec{a}_1, \vec{a}_4) \notin \mathbb{R}^2$
 $\Rightarrow \text{rank}(\vec{a}_1, \vec{a}_4) = 2$
基底 $(\vec{a}_1, \vec{a}_4) \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$