

前回 (レポート 19 23:59 (JST) (めい))

基本変形

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- ① 第 i 行を $\lambda (\neq 0)$ 倍する
- ② 第 i 行と第 j 行をいれかえる
- ③ 第 i 行の λ 倍を第 j 行に加える

基本変形 $A \rightarrow B$ (簡約化) $\text{rank } A$
 スタート変形 (簡約化) (Bの01741でよい)
 (Bの01741でよい)
 (Bの01741でよい)

資料

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

③

③

3行目=

4行目=

資料問題9

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ を簡約化し
 3の階数を求めよ

③ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

3行目 = 1行目 $\times$ 1 または
 4行目 = 1行目 $\times$ (-2) または

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

③
 4行目

rank

(めい)

③
4行目に2行目 $\times(-1)$ をします

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

簡約系

rank = 3

(注) 簡約化では $\rightarrow$ のみで可

$\begin{pmatrix} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \end{pmatrix}$ とかいて下さい

基本
基本
基本
定理
R基
か

基本行列 (教科書 p42 ②)(4)(5)
基本変形に対応する行列

基本変形 = 基本行列を
左からかける

定理) どんな行列 A も
R 基本行列の積と簡約行列 B
かいて $RA = B$ とかける

2.5.2 斉次方程式のとき

解法 ($A\vec{x} = \vec{0}$)
(ガウスの消去法)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

は次のようになる ($A\vec{x} = \vec{0}$)

例 係数行列 A をとく

例 A に基本変形をくりかえして
簡約行列 B を得る

例 $B\vec{x} = \vec{0}$ をとく

例
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$
 をとく

例 係数行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

手順2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2行目 + 1行目 $\times (-2)$
3行目 + 1行目 $\times (-1)$

$$\xrightarrow{\textcircled{1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2行目 $\times (-1)$
1行目 + 2行目 $\times (-2)$

$$\xrightarrow{\textcircled{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$$

1行目 + 3行目
2行目 + 3行目 $\times (-1)$

手順3 $B\vec{x} = \vec{0}$ とおく

$$\text{つまり } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ とおく}$$

$$\text{つまり } \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$x_1 = x_2 = x_3 = 0$

例1

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

判別
係数
行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

判別

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(3)

1行目+2行目
3行目+2行目
4行目+2行目

判別2 A を簡約化する

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(3)

3行目+1行目×(-1)
4行目+1行目×(-1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

(3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3)

1行目+2行目×(-1)
3行目+2行目×(-1)
4行目+2行目×(-2)

1行目+3行目×(-2)
2行目+3行目×(-1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R(\text{簡約})$$

手順} $Bx' = \vec{0}$ とする

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ とする}$$

$x_1 = 0$
 $x_2 = 0$
 $x_3 - 2x_4 = 0 \Rightarrow x_3 = 2x_4$
 $x_4 = 0$

$x_1 = 0$
 $x_2 = 0$
 $x_3 = 2x_4$
 $x_4 = 0$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -s \\ 2s \\ s \end{pmatrix} \quad s \text{ は任意}$$

とすればいい

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -s \\ x_3 = 2s \\ x_4 = s \end{cases} \quad s \text{ は任意}$$

定理 $A\vec{x}=\vec{0}$ の解の次元

(自由に選べる変数の個数)

は $n - \text{rank}(A)$ で与えられる

例 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ のとき

$A\vec{x}=\vec{0}$ の解の次元 $= 1$ (517の2)

$\text{rank} A = 3$ $n=4$, $n - \text{rank} A = 1$

証明 A を簡約化して B に変えたとする。

簡単のため $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & ? \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & ? \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ の形とする

つまり $r = \text{rank} A$ とする

$B_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \text{かつ } i \leq r \\ 0 & (i \neq j) \text{かつ } i \leq r \text{ かつ } 0 \leq m-r+1 \leq i \leq m \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$

ある $Bx' = 0$ は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ \vdots \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + \textcircled{1} x_{r+1} + \textcircled{1} x_{r+2} + \cdots + \textcircled{1} x_n = 0 \\ + \textcircled{1} x_{r+1} + \cdots + \textcircled{1} x_n = 0 \\ \vdots \\ x_{r+1} + \textcircled{1} x_{r+1} \cdots \textcircled{1} x_n = 0 \end{pmatrix}$$

 となる
 $(Bx' = 0 \text{ の解}) = (Ax' \text{ の解})$ より
 $Bx' = 0$ の解の次元 (自由に選べる変数)
 $(x_{r+1}, \dots, x_n)$ のコスタ $= n - r$
 $\square$

2.6 逆行列の計算 (教科書 2.5)
定義 A n 次正方行列 について
 ($n \times n$ 行列)
 ある n 次正方行列 B があって
 $AB = BA = E_n$ (E_n は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n 次単位行列)
 となるとき B を A の逆行列 といふ
 $B = A^{-1}$ とかく、このとき A は 正則 といふ

つまり A が正則だとお示さん
 $B = A^{-1}$ ができる

例 $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列は $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

証明 $AB = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

$BA = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(補)

例 $A =$

証明 A^{-1}

$AA^{-1} =$

$A^{-1}A =$

よって

よって

(補) $ad-bc \neq 0$ なら $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

例 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は逆行列を持たない

証明 A^{-1} という逆行列があったと $A^{-1} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$

$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^{-1}A = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p+q \\ 0 & r+s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

よって 2 番目の (1,1) 成分をみれば $0 = 1$ となり矛盾

例

証明

前問

F

G

H

I

J

$\begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(例) 基本行列は正則
 (証明) 教科書 P.42 の ② ④ ⑤
 前回は

$$\begin{cases}
 F_{i\lambda} F_{i\lambda}^{-1} = F_{i\lambda}^{-1} F_{i\lambda} = E \\
 G_{ij} G_{ij} = E \\
 H_{i\lambda} H_{i(-\lambda)} = H_{i(-\lambda)} H_{i\lambda} = E
 \end{cases}$$

(注) A^{-1}

(逆行列のこじやり)

$Ax = b$ (連立1次方程式)

において A が正則 だと

$x = A^{-1}(Ax) = A^{-1}b$ となる

(注) A^{-1} を求めるのは大変なので
 実用的ではない

(欠のこじやり)

(定理) A $n \times n$ 行列, E_n n 次単位行列
 $[A \ E_n]$ を基本変形で返して
 $[E_n \ B]$ (B $n \times n$ 行列) となたとする
 このとき A は正則で $B = A^{-1}$
 ($n=3$ なら 3×3 行列の逆行列になる)

例 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ
 (2) 例 $[A \ E] = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$
 よって $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

