

6/5 レポート (6/19 (木) まで)

前回

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} (\star)$$

$$\leadsto A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{係数行列}$$

(定理) ガウスの消去法

☆ の方程式は次の3つの
操作をくりかえして解ける

① i 番目の方程式を λ 倍する ($\lambda \neq 0$)

② i 番目と j 番目の方程式を入れかえる

③ i 番目の λ 倍を j 番目に加える

プログラミングで実現可能

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - 4y = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 4y = 9 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 4y = 9 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 4y = 9 \\ x = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases}$$

$x = 9 + 4y$
 $\rightarrow$

①と②の
 いれかえ
 ②に①の(-2)倍
 をたす
 ② $\times \left(\frac{1}{11}\right)$
 ①に② $\times 4$ をたす

① A
 ② A
 ③ A

これを行列にいいなおしたのが
 行基本変形

定義 A に対し次の3つを
 行基本変形という

① A の 第 i 行 を λ 倍する ($\lambda \neq 0$)
 ② A の 第 i 行 と 第 j 行 を 入れかえ
 ③ A の 第 i 行 の λ 倍を 第 j 行 に たす

例 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \end{pmatrix}$ ← $\begin{cases} 2x+3y=7 \\ x-4y=9 \end{cases}$ の拡大
 ② $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 9 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ ← ①と②を交換
 ③ $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 9 \\ 0 & 11 & -11 \end{pmatrix}$ ← ②に①の $\times(-2)$ をたす
 ④ $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 9 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ← ②に $\times \frac{1}{11}$
 ⑤ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ← ①に②の $\times 4$ をたす

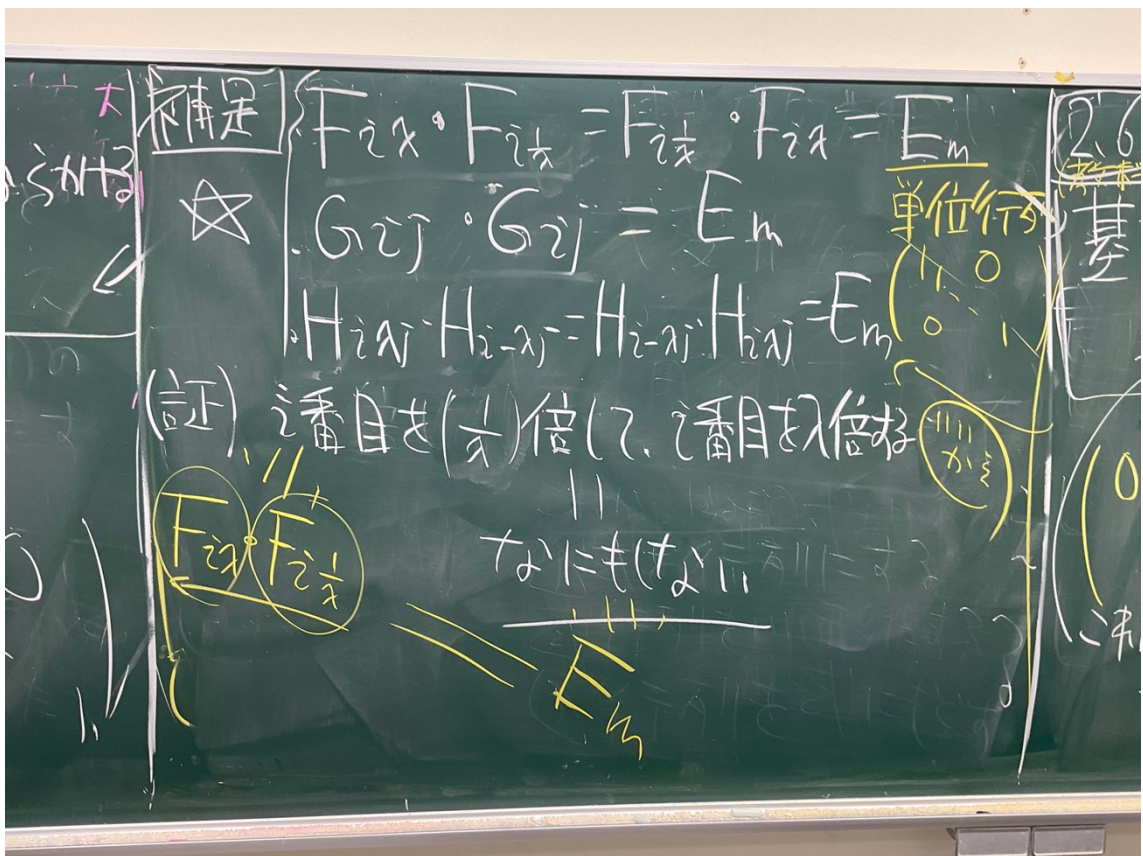
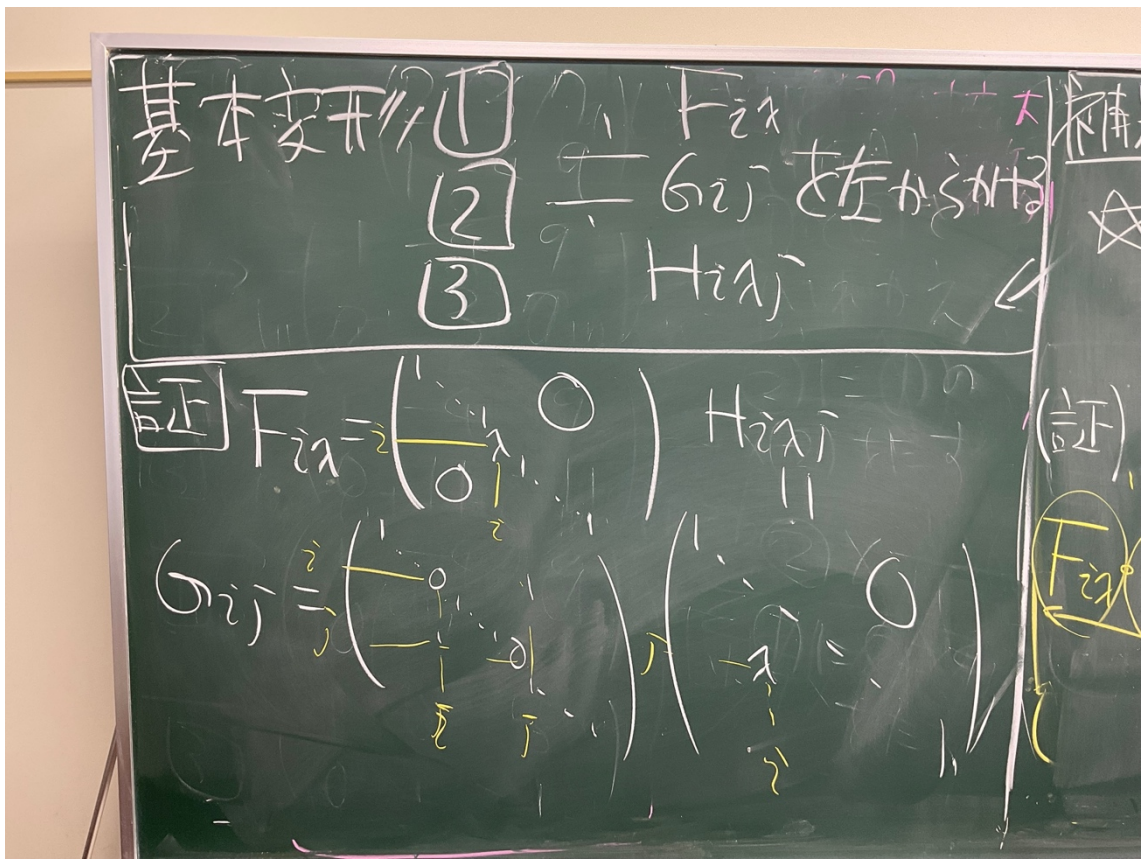
行列 = 連立1次方程式
 基本変形 = 式変形
 ① ② ③
 ④ ⑤ ⑥
 ⑦ ⑧ ⑨
 ⑩ ⑪ ⑫
 ⑬ ⑭ ⑮
 ⑯ ⑰ ⑱
 ⑲ ⑳ ㉑
 ㉒ ㉓ ㉔
 ㉕ ㉖ ㉗
 ㉘ ㉙ ㉚
 ㉛ ㉜ ㉝
 ㉞ ㉟ ㊱
 ㊲ ㊳ ㊴
 ㊵ ㊶ ㊷
 ㊸ ㊹ ㊺
 ㊻ ㊼ ㊽
 ㊾ ㊿

定理 3つの行基本変形には
 逆の変換が存在し、それは基本変形
 である。

証明 ① については $(\lambda \neq 0)$
 「Aの第i行を λ 倍する」が逆変換
 としては「第i行を $\frac{1}{\lambda}$ 倍する」
 ② は「第i行と第j行のかわき」
 ③ は「第i行の $(-\lambda)$ 倍を第j行に加える」
 (1行目 $\times 2$ を2行目に加える、1行目を2倍を2行目から引く)

定理 (基本行列)
 $A: m \times n$ 行列, $\lambda \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, \dots, m$,
 ② ④ ⑤
 ある $F_{i, \lambda}$, $G_{i, j}$, $H_{i, \lambda}$ $m \times m$ があって

① $F_{i, \lambda} A$ は A の第i行を λ 倍した
 行列
 ② $G_{i, j} A$ は A の第i行と第j行
 をかわした行列
 ③ $H_{i, \lambda} A$ は A の第i行の λ 倍を
 第j行に加えた行列



2.6 (資料25)

基本変形をくりかえして
標準形にする

(これは教科書)
みたくなかった

この定義はね (これは教科書にな
(三つ参照))

(定義) (主成分)

行列において、
それぞれその行の最初に見れる
0でない成分を主成分とい

行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

下義 | 簡約行列 (教科書での標準形)

Aが正則をみたすとき簡約行列とす

- ① 全ての成分が0である
 行は0以外を含む
 行より下側にある

(0...0)
は下に
ある

"1"のBTTT
(右下に1)

- ② 主成分は
③ 右側の列にいくほど主成分は
④ 主成分を持つ列はその主成分+α
は0

手形
 ①
 ②
 ③
 ✕
 段利
 二
 規則
 x9x

例 (0 1 3 0 2)
 (0 0 0 1 1)
 (0 0 0 0 0)

(1 0 1 4 0)
 (0 1 7 -4 0)
 (0 0 0 0 1)

(0 0 0 1 6 0 3 0)
 (0 0 0 0 0 1 2 0)
 (0 0 0 0 0 0 0 0)

簡約

$\boxed{\text{例}}$ っていうもの

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	① がダメ
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	② はダメ
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	③ はダメ
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	④ はダメ

$\boxed{\text{定理}}$

どんな行列 A も 基本変形 を
 くりがえり 簡約行列 B に
 することが出来る (簡約化)
 さらにこの B は 唯一 に定まる
 (基本変形の方法によらず)

定義 A 行列とし (基本変形により)
B を A の簡約化によりえられた

簡約行列とする

$$\text{rank}(A) = \left(\begin{array}{c} B \text{ の } "0 \text{ ではない"} \\ \text{行のこ数} \end{array} \right)$$

とが A の階数 (ランク) である

例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

簡約化すると $B = A$

$$\text{rank } A = 2$$

例2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 簡約

簡約系は $B = A$

$\text{rank } A = 3$

① 簡約化で基本変形の操作は
必要なのは $(1) \rightarrow (2)$ と $(1) \rightarrow (3)$ は不要

例3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} (\text{rank } A = 2)$

簡約系は

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2) \leftarrow (2) - (1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{(1) \leftarrow (1) + (2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{(2) \leftarrow (2) \times (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ (簡約)

① $2 \times (-1)$ 必要

② $1 \times (-1) + 2 \times (-2)$ 必要