

前回 行列の和と積 (準備)

$$A: m \times n \quad B: n \times l$$

$$\sim AB: m \times l \text{ (行列)}$$

ABの(i, k)成分

$$(AB)_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$$

$$\begin{array}{l} A: 1 \times 3 \\ B: 3 \times 1 \\ \hline \rightarrow AB: 1 \times 1 \end{array}$$

$$\text{例 } (1 \ 3 \ 5) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (1 \times 3 + 3 \times 2 + 5 \times 1) = (14)$$

行列

$$A =$$

$$3 \times$$

$$C =$$

$$1 \times 3$$

問題 61 次の A B C D のうち
積が定義される全ての組み合わせを
求め、その積を計算せよ

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB \neq BA$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\underline{123}$$

$$1 \times 1$$

$$1 \times 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B$$

$$A$$

$$AC$$

$$C$$

$$CA$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} A: 3 \times 1, B: 3 \times 2 \rightsquigarrow AB \text{ は } 3 \times 2$$

$$B: 3 \times 2, A: 3 \times 1 \rightsquigarrow BA \text{ は } 2 \times 1$$

$$A: 3 \times 1, C: 1 \times 3 \rightsquigarrow AC \text{ は } 3 \times 3 \text{ 行列}$$

$$AC = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C: 1 \times 3, A: 3 \times 1 \rightsquigarrow CA \text{ は } 1 \times 1 \text{ 行列}$$

$$CA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (4 + 0 - 1) = (3)$$

主な: $A: 3 \times 1$ $D: 2 \times 2 \sim AD$ できない
 $D: 2 \times 2$ $A: 3 \times 1 \sim DA$:
 行列: $B: 3 \times 2$ $C: 1 \times 3 \rightarrow BC$:
 $C: 1 \times 3$ $B: 3 \times 2 \rightarrow CB$ 1×2 行列
 $CB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 5 \end{pmatrix}$
 行列: B

$B: 3 \times 2$ $D: 2 \times 2 \sim BD$ 3×2
 $BD = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 17 \\ 7 & 16 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$
 $D: 2 \times 2$ $B: 3 \times 2 \sim DB$ できない
 $C: 1 \times 3$ $D: 2 \times 2 \rightarrow CD$ できない
 $D: 2 \times 2$ $C: 1 \times 3 \rightarrow DC$:
 $\boxed{\text{答}} \quad AC = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad CB = \begin{pmatrix} 16 & 5 \end{pmatrix}$
 $\quad \quad \quad CA = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix} \quad BD = \begin{pmatrix} 4 & 17 \\ 7 & 16 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

2

定義 $A: m \times n$ 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

$f_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$\vec{x} \mapsto A\vec{x}$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $n \times 1$ 行列

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $m \times n$ 行列

$A\vec{x}$ $m \times 1$ 行列

$(A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ と } \vec{x} \in \mathbb{R}^n)$

$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への
線形写像

1) **分配性** ① A, B $m \times n$ 行列の時

$(A+B)\vec{x} = A\vec{x} + B\vec{x}$ が
 $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ で成り立つ。

$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への
線形写像

$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への
線形写像

$f_{A+B}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ とすると
 $\vec{x} \mapsto (A+B)\vec{x}$

$f_{A+B}(\vec{x}) = f_A(\vec{x}) + f_B(\vec{x})$
(が成り立つ)

② $A: m \times n$ 行列, $B: l \times m$ 行列
 $x \in \mathbb{R}^n$ について
 $B(Ax) = (BA)x$ が成り立つ

また $f_{BA} = f_B \circ f_A$

$\begin{matrix} B & l \times m \\ A & m \times n \\ x & n \times 1 \end{matrix}$

$f_{BA}: \mathbb{R}^n \xrightarrow{(A \times I_B)} \mathbb{R}^m \xrightarrow{(B \times I_1)} \mathbb{R}^l$
 $x \mapsto Ax \mapsto B(Ax)$

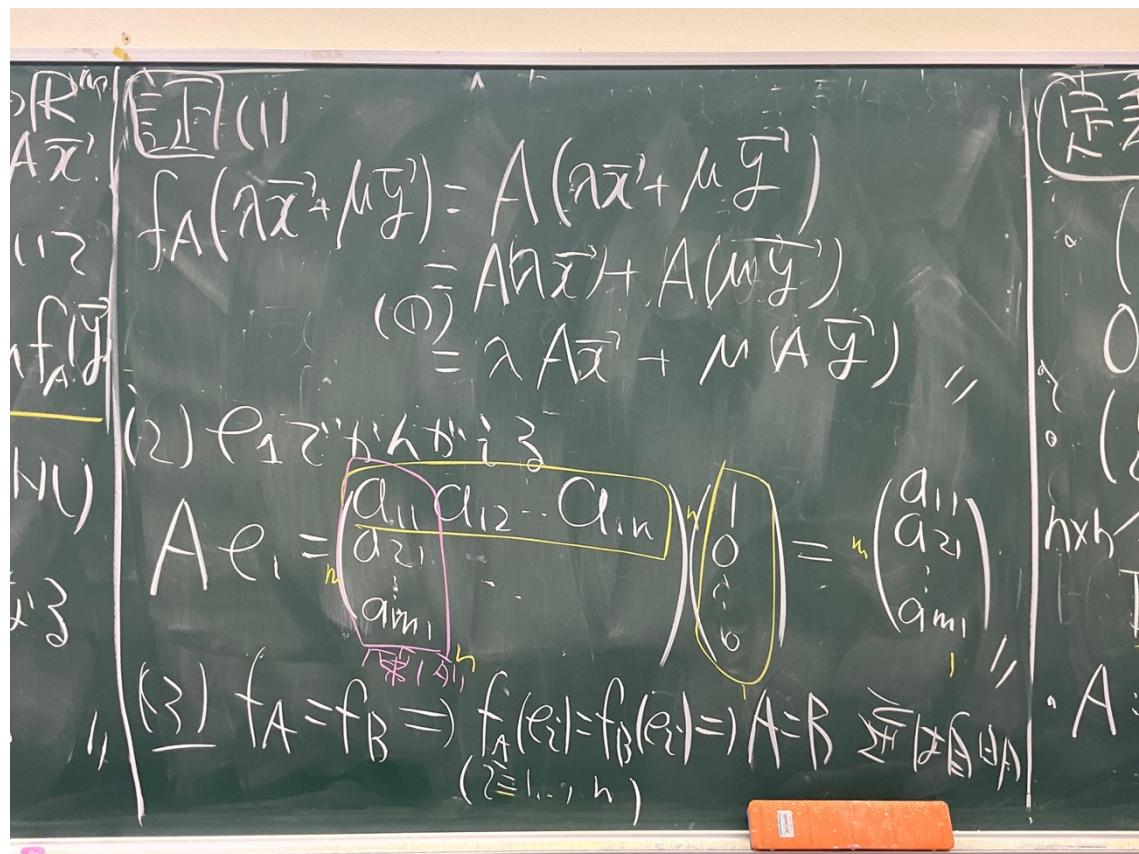
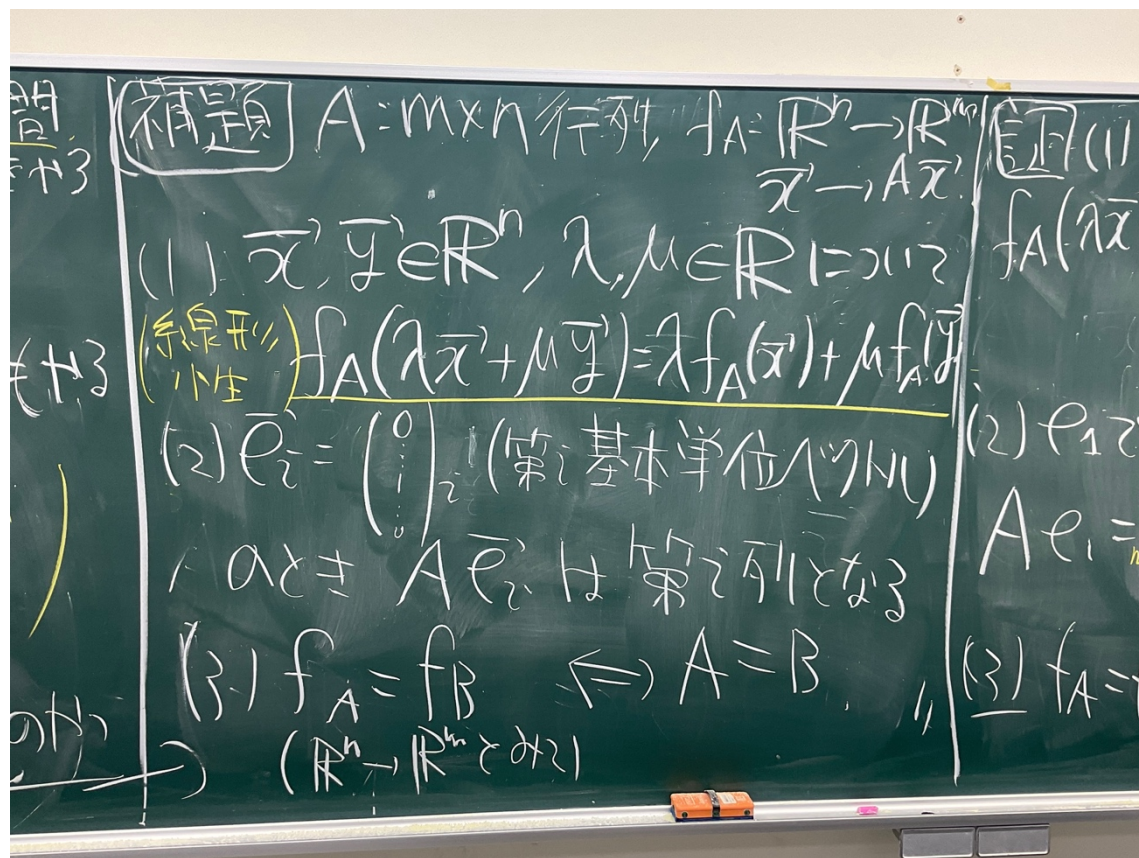
(2x2 の行列)

(補足) 後期で抽象的ベクトル空間
 (eg. 数列 $\{a_n\}$, 関数 $\cos x$)

ベクトル空間の基底写像 (eg. $f \mapsto \int_{\mathbb{R}} f dx$, $f \mapsto f(0)$)

基底写像は行列 (有限次元)

(補足) (1) x
 (2) $e_i =$
 (3) $f_A =$
 (4) $\mathbb{R}^n$



定義

$$(0) \quad (0 \ 0 \ 0)$$

$(0 \ 0 \ 0)$ のように全ての成分が 0 の行列を ゼロ行列 といい O とかく

$(1 \ 0)$ のように $a_{ii} = 1$ 以外の 0 の $n \times n$ 行列を $(n$ 次の) 単位行列 といい

$$E \text{ (or } E_n) \text{ とかく } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A: n \times n \Rightarrow A^m = \underbrace{A \cdots A}_{m \text{ 回}} \text{ といふ } (m \geq 1)$

命題 n 次正方行列は次の性質を満たす

- (1) $A + B = B + A$ 交換律
- (2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ 結合律
- (3) $A + O = O + A = A$ ゼロ行列の存在
- (4) $-A$ を $(-1)A$ とすると $A + (-A) = O$ 和の逆元の存在
- (5) $(AB)C = A(BC)$ 結合律
- (6) $AE = EA = A$ 単位元の存在
- (7) $A(B + C) = AB + AC$
 $(A + B)C = AC + BC$ 分配律

特異に
 $(A + B)C = AC + BC$
 $AB \neq BA$

特異に n 次正方行列全体は $M_n(R)$
 $\mathbb{R}$ の基底をもつ
 かん (ring)
(たしざん, ひきざん, かたざんが)
 (かけざんはできなくてよい)
 $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \dots\}$ $\mathbb{R}$ の $\mathbb{R}$ (ab-group 可換環)
 $AB \neq BA$ (一般に) 非可換環
 ひきかんかん

問 69
 右計算

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 5 & 9 \\ 3 & -2 & 8 \\ -1 & 8 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 5 & 9 \\ 3 & -2 & 8 \\ -1 & 8 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -6 & -4 & -6 \\ 8 & -4 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -3 & -6 & 2 \\ 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -12 & -12 & 17 \\ 13 & -14 & 22 \\ 7 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

2.3 ニガマ記号の練習 (省田各)

定義 (クロネッカーのデルタ)

$i, j = 1, \dots, n$ について

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \text{ とする}$$

単位行列 $E = (\delta_{ij})_{n \times n}$ ($\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$)

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \delta_{jk} = a_{ik} \quad (\Rightarrow AE = A)$$

2.4 行列の基本変形

連立方程式 $Ax = \vec{b}$ をとく

定義 (係数行列, 拡大係数行列)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \star a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$[A] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

$[A|\vec{b}] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

係数行列
 拡大
 係数行列
 (2.8 知らない)

$$[A|\vec{b}] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

☆) $A\vec{x} = \vec{b}$ とおいて

例Ⅰ) $\begin{cases} 2x + 3y = 17 \\ x - 4y = 9 \end{cases}$

$\leadsto A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} [A|\vec{b}] = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 17 \\ 1 & -4 & 9 \end{pmatrix}$

例Ⅱ) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 7 \\ x_1 - x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$

$\leadsto A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 9 & 0 \end{pmatrix} [A|\vec{b}] = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 9 & 0 & 0 \end{pmatrix}$