

5/15 休講

線形変換

前回 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

例 $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

回転

反射

2 行行列と連立1次方程式

例 行列の定義 計算

$\begin{cases} 2x + 3y + 5z + 7w = 11 \\ x + y + z + w = 13 \\ x - y - z - w = 17 \end{cases}$ とおく

線形写像の像と核

2.1 数ベクトル空間

定義 $(x_1, \dots, x_n)$ or $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$(x_1, \dots, x_n)$ (実数) を n -次元の数ベクトル

$\mathbb{R}^n = \{ (x_1, \dots, x_n) \mid x_i \text{ は実数} \}$

と表わし **数ベクトル空間** といふ

例 $\mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}^3$ $\mathbb{R}^4$

例 $\mathbb{R}^2 = \{ (x_1, x_2) \mid x_i \in \mathbb{R} \}$ 平面

$\mathbb{R}^3 = \{ (x_1, x_2, x_3) \}$ 2次元空間

$\mathbb{R}^4 = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \}$ 3次元空間

$\vec{0} = (0, \dots, 0)$ ゼロベクトル

$\vec{e}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ 基本単位ベクトル

番号 $(i=1, 2, \dots, n)$

定義 $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$
 $\alpha \in \mathbb{R}$ について

和・差 $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1, \dots, a_n \pm b_n)$

スカラー倍 $\alpha \vec{a} = (\alpha a_1, \dots, \alpha a_n)$

線形結合 $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$
 $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$

$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n \in \mathbb{R}^n$

例 $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ は $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ の線形結合

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n$$

$$c_1 \vec{a}_1 + \dots + c_n \vec{a}_n = \vec{0}$$

となる実数

$c_1, \dots, c_n$ が 0 以外
 $\neq 0$

(平行な
 一般化)

定義 線形独立, 従属 (じゆうどく)

$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ とする

① $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ が 線形独立 とは

$[c_1 \vec{a}_1 + \dots + c_n \vec{a}_n = \vec{0} \text{ ならば } c_1 = \dots = c_n = 0 \text{ となること}]$

② $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ が 線形従属 とは

線形独立でないこと

例 $n=2 \mathbb{R}^2$

$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{a}_1$ と $\vec{a}_2$ は線形独立

証明 $c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2 = \vec{0}$ ならば $c_1 = c_2 = 0$ を示す.

$c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} c_1 + 2c_2 \\ 2c_1 + 2c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とすると

$c_1 + 2c_2 = 2c_1 + 2c_2 = 0$ より $c_1 = c_2 = 0$.

$\vec{a}_2$ と $\vec{a}_3$ は系線形従属

【証】 $C_1=1$ $C_2=2$ とおくと

$$C_1 \vec{a}_2 + C_2 \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 2C_1 - C_2 \\ 2C_1 - C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{a}_2$ と $\vec{a}_3$ は系線形独立となるので

【証】 $C_1=0$ $C_2=1$ とおくと

$$C_1 \vec{a}_2 + C_2 \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 2C_1 + 0C_2 \\ 2C_1 + 0C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。

$\vec{a}_1$

【証】

$C_1 \vec{a}_1$

$\vec{a}_1$

【証】

$C_1 \vec{a}_1$

$\vec{a}_1$ は系線形独立

【証】 $C_1 \vec{a}_1 = 0$ ならば $C_1 = 0$ を示す

$$C_1 \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} C_1 \\ 2C_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より } C_1 = 2C_1 = 0$$

となる。
 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ は系線形独立

【証】 $C_1=0, C_2=1, C_3=2$ とおくと

$$C_1 \vec{a}_1 + C_2 \vec{a}_2 + C_3 \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} C_1 + 2C_2 - C_3 \\ C_1 + 2C_2 - C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.2 一般の行列

(定義) $m \times n$ の数 (実数, 複素数)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(行)

(列)

$m \times n$ (型) 行列, とい
(m, n) 行列

$A = (a_{ij})_{m \times n}$ と略記することもある

$(a_{21}, \dots, a_{2n})$ A の行

$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ A の列

(第 i 行) (第 j 列)

$m=n$ のとき

$n \times n$ 行列が n 次正則行列
とい

定義 $m \times n$ 行列 A, B に対して

$$A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \text{ とする}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

例 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -25 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1-2 & -2+5 & 8+1 \\ 2+3 & 5-1 & -1+2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 3 & 9 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 - (-2) & -2 - 5 & 8 - 1 \\ 2 - 3 & 5 - (-1) & -1 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 7 \\ -1 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{例12}} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 7 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\quad \quad \quad \underline{2 \times 2} \quad \quad \quad \underline{2 \times 3}$$

$(A+B) \text{ は (定義) できない}$

$\boxed{\text{定義}}$ スカラー倍

$A = (a_{ij})$ α 数 $\Rightarrow$ $m \times n$ 行列

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \dots & \dots & \alpha a_{2n} \\ \alpha a_{m1} & \dots & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix} \quad \times \alpha$$

$\boxed{\text{例11}} \quad \alpha = 3 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

$$\alpha A = \begin{pmatrix} 3 \times 1 & 3 \times (-2) & 3 \times 8 \\ 3 \times 2 & 3 \times 5 & 3 \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 24 \\ 6 & 15 & -3 \end{pmatrix}$$

定義 $A: m \times n$ 行列
 $B: n \times l$ 行列 α と β

$A \cdot B$ を $m \times l$ 行列で

$AB = (C_{ik})_{m \times l}$ と書いたとき

$$C_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk}$$

$$= \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \quad \text{と書く}$$

つまり AB の (ik)成分 (C_{ik} の α) は

A の第 i 行 $(a_{i1} \dots a_{in})$ と

B の第 k 列 $\begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix}$ の内積

$$(a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk})$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

A : 1×3 行 $\times$ 列
 B : 3×1 行 $\times$ 列

$\Rightarrow AB$ 1×1 行 $\times$ 列

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = (1 \times 5 + 2 \times 7 + 3 \times 2) = (25)$$

B : 3×1 行 $\times$ 列
 A : 1×3 行 $\times$ 列
 BA : 3×3 行 $\times$ 列

$$BA = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \times 1 & 5 \times 2 & 5 \times 3 \\ 7 \times 1 & 7 \times 2 & 7 \times 3 \\ 2 \times 1 & 2 \times 2 & 2 \times 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 7 & 14 & 21 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

(1列12) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ 6まい

$A \cdots 2 \times 3$ 行列

$B \cdots 1 \times 4$ 行列

AB は (定義) ではない

A の

B の

$a_{2,1}$