

4/24/休講 次は5/8, 5/15/休講

前問 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}$

$\rightarrow A\vec{x} = \begin{pmatrix} ap+br \\ cp+dr \end{pmatrix}$ (a,b) × (p,r) の内積
(c,d) × (p,r) の内積

$B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = (\vec{x}, \vec{y})$ = ?

$AB = (A\vec{x} \ A\vec{y}) = \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}$

1.2 線形写像としての
 (演1.3) 行列の意味

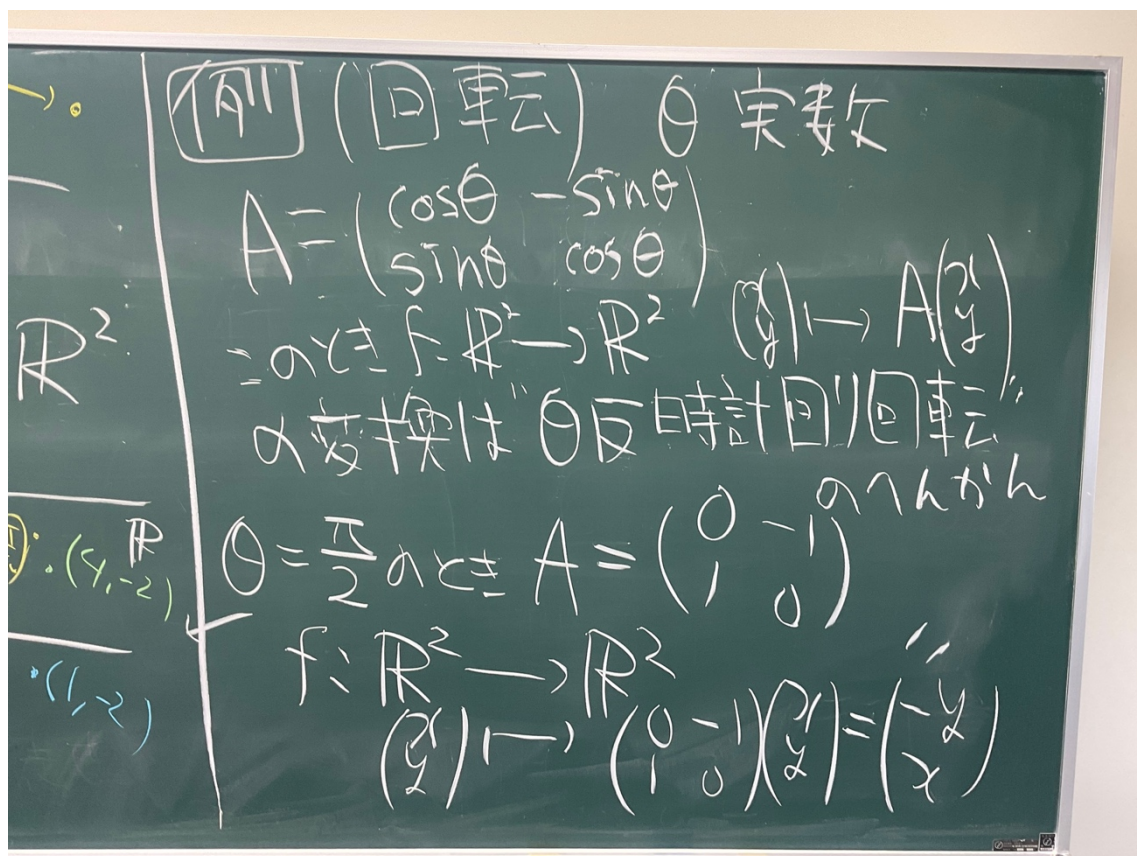
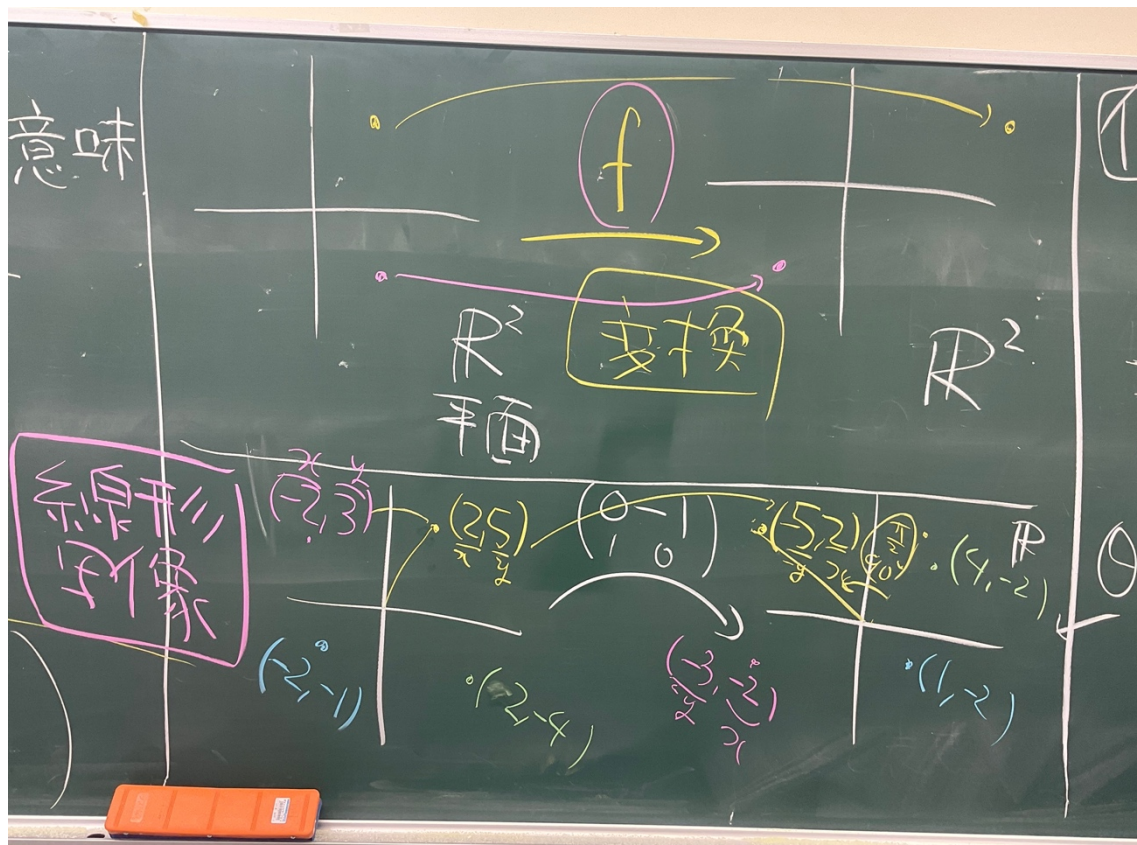
定義 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ として

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

原点への変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}$

線形写像



例 (鏡映) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$

$(-2, 3) \xrightarrow{\begin{pmatrix} x & y \\ (2, 5) \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2, 5 \\ x & y \end{pmatrix} \rightarrow (2, 3)$

$(-2, -1) \xrightarrow{\begin{pmatrix} x & y \\ (2, -4) \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2, -4 \\ x & y \end{pmatrix} \rightarrow (2, -1)$

一般には $(y=mx)$ の直線の鏡映

$A = \begin{pmatrix} \frac{1-m^2}{1+m^2} & \frac{2m}{1+m^2} \\ \frac{2m}{1+m^2} & \frac{1-m^2}{1+m^2} \end{pmatrix}$ で与えられる

例 $\begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$

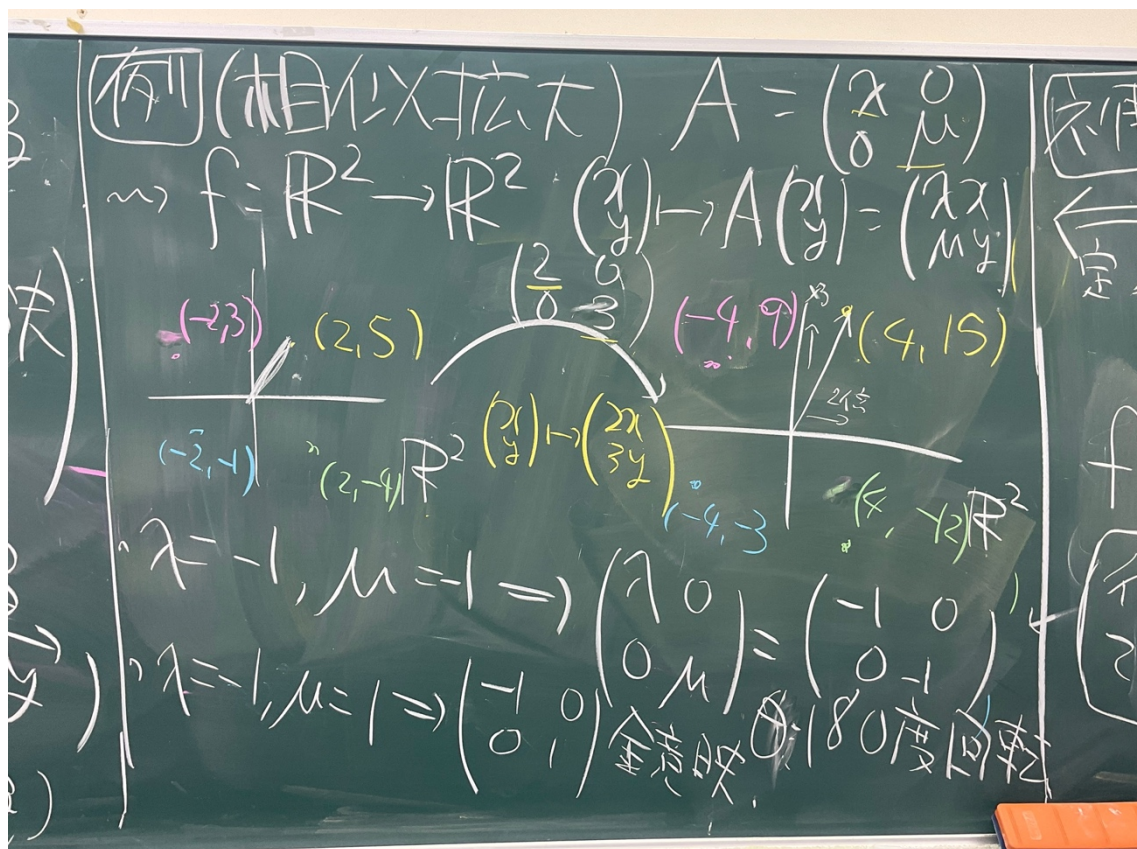
定理 $P = (\text{回転と鏡映})$

後期Aでやる $\Rightarrow$ 合成

内積は保存される

つまり $(P\vec{x}, P\vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y})$

(証明はガウス計算ね)



定義 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 線形

$f(\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}) = \lambda f(\vec{a}) + \mu f(\vec{b})$
 $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

f が **線形** $\iff$ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ があって
 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
 とかける

逆変換

定義 (1) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 単位行列という

また $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto E \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は

何もない変換 (恒等変換)

(2) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について, " $ad - bc \neq 0$ " のとき

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

A の逆行列という

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の
逆の変換を与える

例 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 90度反時計
回転

$$A^{-1} = \frac{1}{0 \cdot 0 - (-1)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

90度反時計回転
90度時計回転

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$AA^{-1} = E = A^{-1}A$

行列の積 = 変換の合成

Diagrams showing a 90° counter-clockwise rotation (pink) and a 90° clockwise rotation (yellow) on a coordinate system.

Definitions on the right side of the board:
 定義
 A
 $\text{Image } A$
 $=$

定義 像 (あとで定義(く)かる)

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について

$\text{Image } A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} y \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$

の合成

定理 A, B 2×2 行列.

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$g \circ f: \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto (BA) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

は $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \boxed{BA} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となる

例 $f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 90度 反時計

$g: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 90度 時計

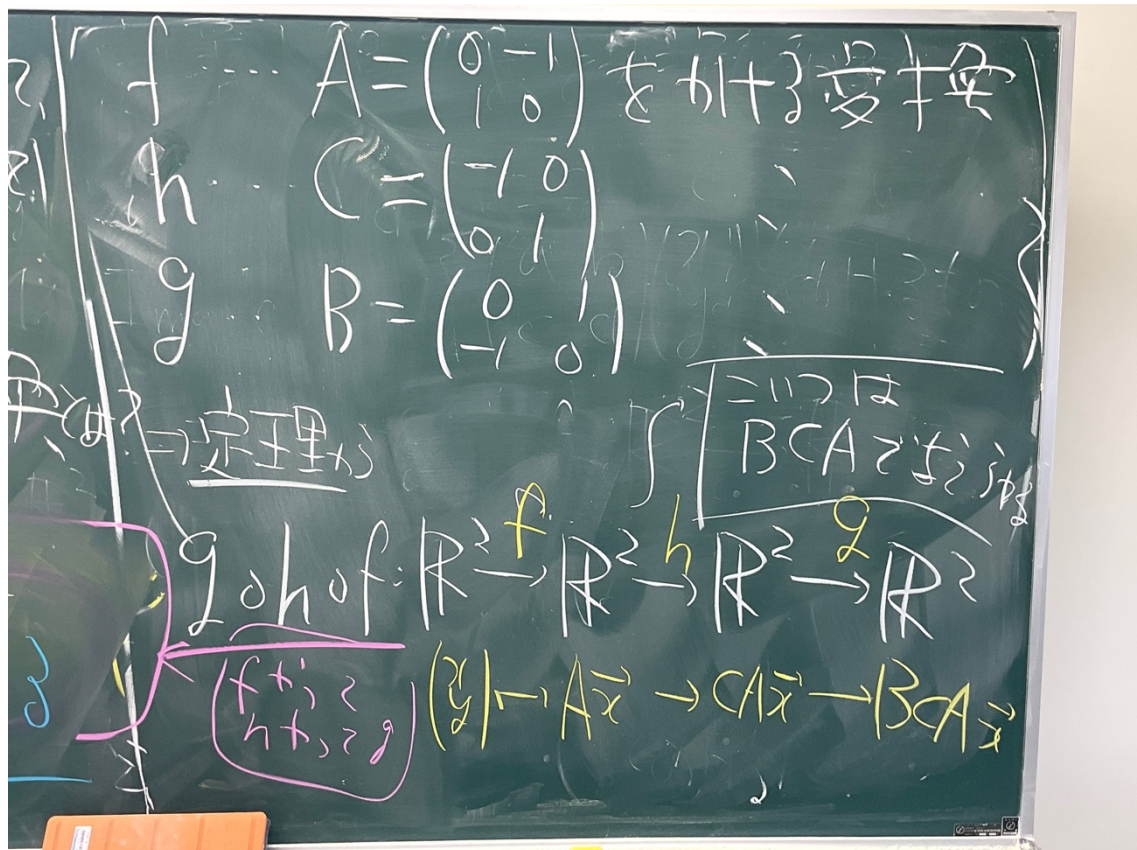
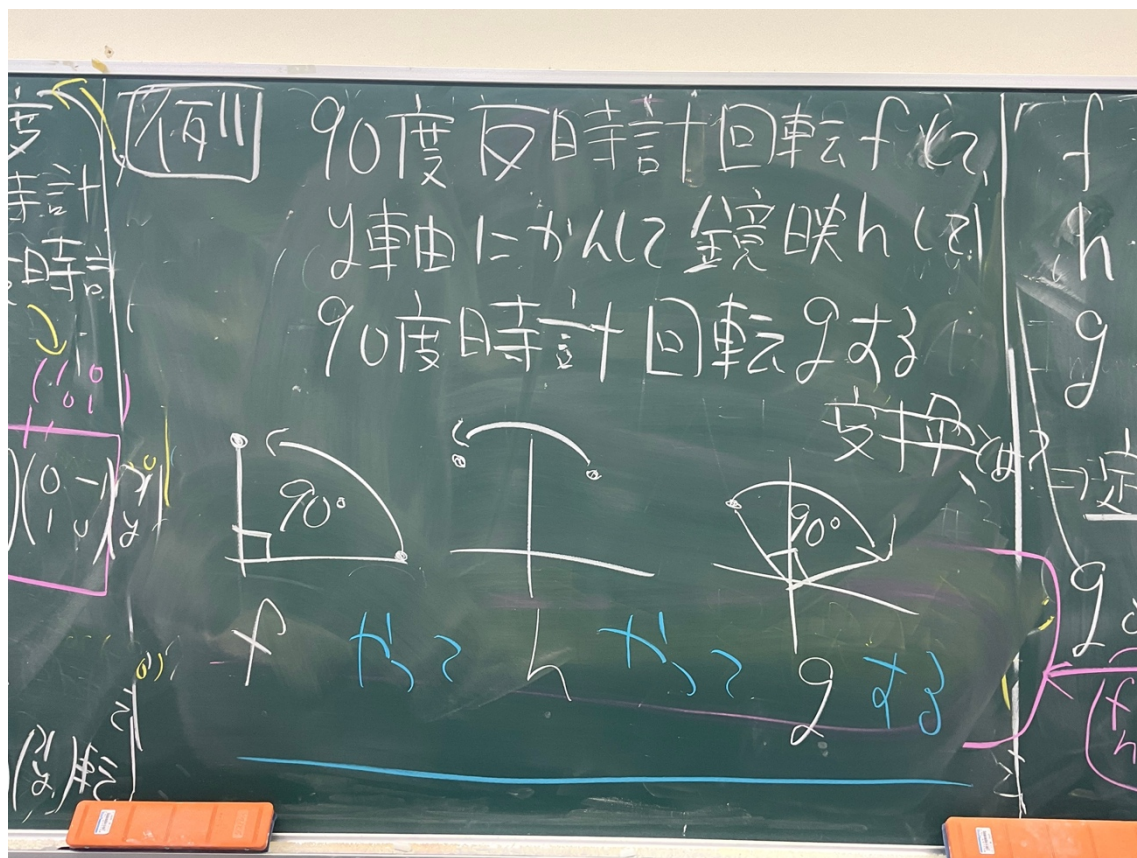
$g \circ f: \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{g \circ f} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$f \circ g: \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$

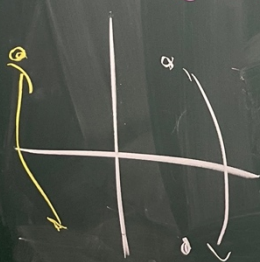
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



$$\text{例 } BCA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

x 軸での鏡映 $= y=0$ での鏡映 $\begin{pmatrix} \frac{1-0^2}{1+0^2} & \frac{2 \times 0}{1+0^2} \\ \frac{2 \times 0}{1+0^2} & -\frac{1-0^2}{1+0^2} \end{pmatrix}$



よう $20h of 1$ は
 x 軸での鏡映
 になる

定理の証明

示すこと $(BA)\vec{x} = R(A\vec{x})$
 を示せばよい

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

において計算せよ

だけ

行列式と外積 (省田各)

(重要)

定義 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について

$\det A = ad - bc$ と定義し
 $(|A|)$ A の行列式

これは $\det A$ は $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ の外積

$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\parallel$

$\angle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ と } \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ が作る平行四辺形の面積

$\times$ の面積

$\begin{pmatrix} +1 \end{pmatrix}$ (もし $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ が $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ が右時計
 回にあるとき
 (左にある)
 右に)

$\begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$