

この授業でやること

・ 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 11 \\ 7 & 8 & 9 & 12 \end{pmatrix}$

・ 十四則演算

・ 連立一次方程式を

・ 行列式 系形写像

1 平面と幾何のまとめ

1.1 デカルト座標とベクトル

定義 $\mathbb{R} = \{\text{実数}\}$

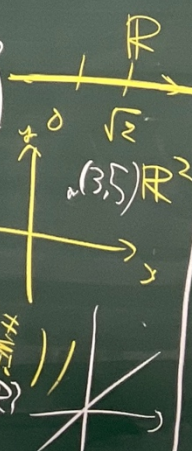
$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

空間

$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$

平面

$(x, \tilde{y})$ は $\mathbb{R}^2$ の $\tilde{y}$ (虚数)



像

$\mathbb{R}^3$ の $\vec{a}$ を $(\vec{a})$ とかく
 $\vec{a} = (x, y, z)$ または $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とかく
 (a とかく) $(\mathbb{R}^3)$

和 $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$
 $(\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3))$

スカラー倍 $c\vec{a} = (ca_1, ca_2, ca_3)$
 $c \in \mathbb{R}$

線形結合
 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
 $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$
 $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$

内積 $(\vec{a}, \vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

補足 後期で (ベクトル空間)

和, ..., 内積を抽象化
(資料6.7ページ) したものを扱う

いろんなことがなりたつ (省略)

• $\vec{a}$ の長さ $= \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})} = \|\vec{a}\|$
• $(\vec{a}, \vec{b}) = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta$
• 平面の方程式 $(ax+by+cz=d)$

1, 2 系

定義

2x2

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

(2)

1, 2 系 形状画像としての 行列 の意味

の 前 に ...

定義 2x2 行列

1) 2x2 個の数 (実数または複素数)
2) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と書いたものを 2x2 行列
(or (2,2) 型行列) といふ。

2. 1. $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \right) \in 2 \times 1$ 行列とみなす
 2. 2×2 行列に和、差、スカラー倍を定義する
 素数) 和、差 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+p & b+q \\ c+r & d+s \end{pmatrix}$
 列) スカラー倍 λ 数
 1. $\lambda \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$

3) 例) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$
 $3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 15 \end{pmatrix}$
 $-1 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$

(定義) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}$ について

2×2 行列 2×1 行列

積 $A\vec{x} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}$

$(a, b) \times (p, r) = \begin{pmatrix} ap + br \\ cp + dr \end{pmatrix}$ で定義

(c, d) と (p, r) の内積

2×1 行列

(注) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}$ は定義で決まる (必ず)

(例) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 5 + 2 \times 1 \\ 4 \times 5 + 3 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 23 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 2 + 3 \times 5 \\ 2 \times 2 + 1 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 9 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 2 + 0 \times 5 \\ 0 \times 2 + 1 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

(a, b) の内積
 (c, d) の内積

(定義) 2×2 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$

積 $AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$

$(a, b) \times (p, r)$ の内積 $= ap + br$
 $(a, b) \times (q, s)$ の内積 $= aq + bs$
 $(c, d) \times (p, r)$ の内積 $= cp + dr$
 $(c, d) \times (q, s)$ の内積 $= cq + ds$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}$ $\vec{y} = \begin{pmatrix} q \\ s \end{pmatrix}$ とおくと

$B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{x} & \vec{y} \end{pmatrix}$

このとき

$AB = \begin{pmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} A\vec{x} & A\vec{y} \end{pmatrix}$

例

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \times 5 + 3 \times 2 & 2 \times 2 + 3 \times 3 \\ 1 \times 5 + 4 \times 2 & 1 \times 2 + 4 \times 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 16 & 13 \\ 13 & 14 \end{pmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \times 2 + 2 \times 1 & 5 \times 3 + 2 \times 4 \\ 2 \times 2 + 3 \times 1 & 2 \times 3 + 3 \times 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12 & 23 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}$$

例 2 是 $AB \neq BA$

$1 \times 3 = 3 \times 1$
 $= 3$
 $1 \times 3 \neq 3 \times 1$

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $(1 \times 1 + 0 \times 0)$
 $(0 \times 1 + 1 \times 0)$

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{1}{A} \right)^{-1} \\
 & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 0 & 1 \times 0 + 2 \times 1 \\ 2 \times 1 + 1 \times 0 & 2 \times 0 + 1 \times 1 \end{pmatrix} \\
 & = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\
 & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\
 & \text{E} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{は } EA \Rightarrow AE = A \text{ となる} \\
 & \text{I と I}^{-1} \text{ (どちらも) E を単位行列とす}
 \end{aligned}$$