7/17 演習→レポート（7/31しめきり）

7/31 試験

前回 行列式があって

det: {n次正方行列} → $\mathbb{R}$

① $\det(E_n) = 1$

② 多重線形性

③ 交代性

資料 定理128

また f: {n次正方行列} → $\mathbb{R}$ が②,③をみたすなら $f(B) = f(E_n)\det B$ となる

例 $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$（サラスの公式）

基本行列 $\det(F_{\lambda,i}) = \lambda$, $\det(G_{ij}) = -1$, $\det(H_{\lambda,i,j}) = 1$

示すこと $\det({}^tA) = \det A$, $\det(AB) = \det A \det B$

① ある行をλ倍すると 行列式 λ倍

② ある2行をいれかえると 〃 −1倍

③ ある行のλ倍を別の行にたしても不変

$\boxed{証}$ $\det(AB) = (\det A) \times (\det B)$

$f_A : \{n次正方\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\qquad B \longmapsto \det(AB)$

とすると f_A は②と③をみたす.

なので $f_A(B) = f_A(E_n) \cdot \det B$

$\qquad = \det A \times \det B.$

① Aの第i行をλ倍した行列は

$F_{i\lambda}A$ より

$\det(F_{i\lambda}A) = \det(F_{i\lambda}) \det A = \lambda \det A$

②, ③も同じ

$\det {}^tA = \det A$ については,

$\det({}^tF_{i\lambda}) = \det(F_{i\lambda})$ と

簡約行列について $\det({}^tB) = \det B$ より

まとめ139 行列式の計算方法

操作1 ある行λ倍するとdetは $\boxed{λ倍}$

2 行のいれかえ $\boxed{-1}$

3 ある行のλ倍を別の行にたす $\boxed{不変}$

$\boxed{操作4}$ $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{vmatrix} = a_{11} \times \det A$

(あとで示す)

or $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & A & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = a_{11} \times \det \underbrace{A}_{n-1 \times n-1}$

⑤ $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

$\boxed{例}$

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & -5 & 7 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \underset{③}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 15 \\ 0 & 11 & 11 \end{vmatrix} \underset{④}{=} 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 15 \\ 11 & 11 \end{vmatrix} \underset{⑤}{=} -154$

$(1 \times 11 - 11 \times 15)$

detの記号

$$
\begin{vmatrix} 2 & -4 & -5 & 3 \\ -6 & 13 & 14 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & -8 \\ 2 & -5 & 0 & 5 \end{vmatrix}
\underset{②}{=} -1 \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 & -8 \\ -6 & 13 & 14 & 1 \\ 2 & -4 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 0 & 5 \end{vmatrix}
$$

$$
\underset{③}{=} -1 \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & -47 \\ 0 & 0 & -1 & 19 \\ 0 & -1 & 4 & 21 \end{vmatrix}
\underset{④}{=} -1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & -47 \\ 0 & -1 & 19 \\ -1 & 4 & 21 \end{vmatrix}
$$

$$
\underset{⑤}{=} (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & -47 \\ 0 & -1 & 19 \\ 0 & 6 & -26 \end{vmatrix}
\underset{④}{=} (-1) \begin{vmatrix} -1 & 19 \\ 6 & -26 \end{vmatrix}
\underset{⑤}{=} 88
$$

定義 $A=(a_{ij})$ の i 行と j 列を くりぬいた行列を $\underline{A_{ij}}$ とかく
$(n-1 \times n-1)$

例 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

$A_{12} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$

$A_{31} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

定理138（余因子展開）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \det A_{11} - a_{21} \det A_{21} + a_{31} \det A_{31} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{n1} \det A_{n1}$$

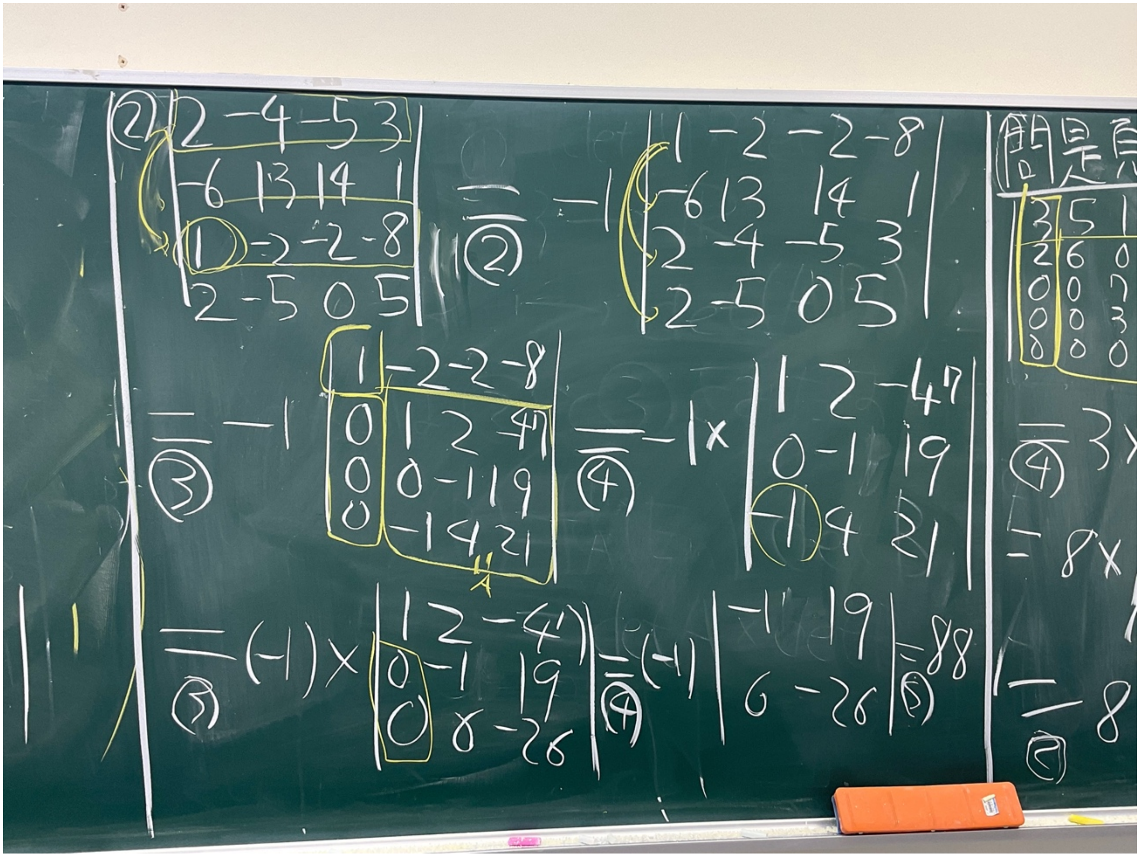
同様に・・・が成り立つ。
（定理138）

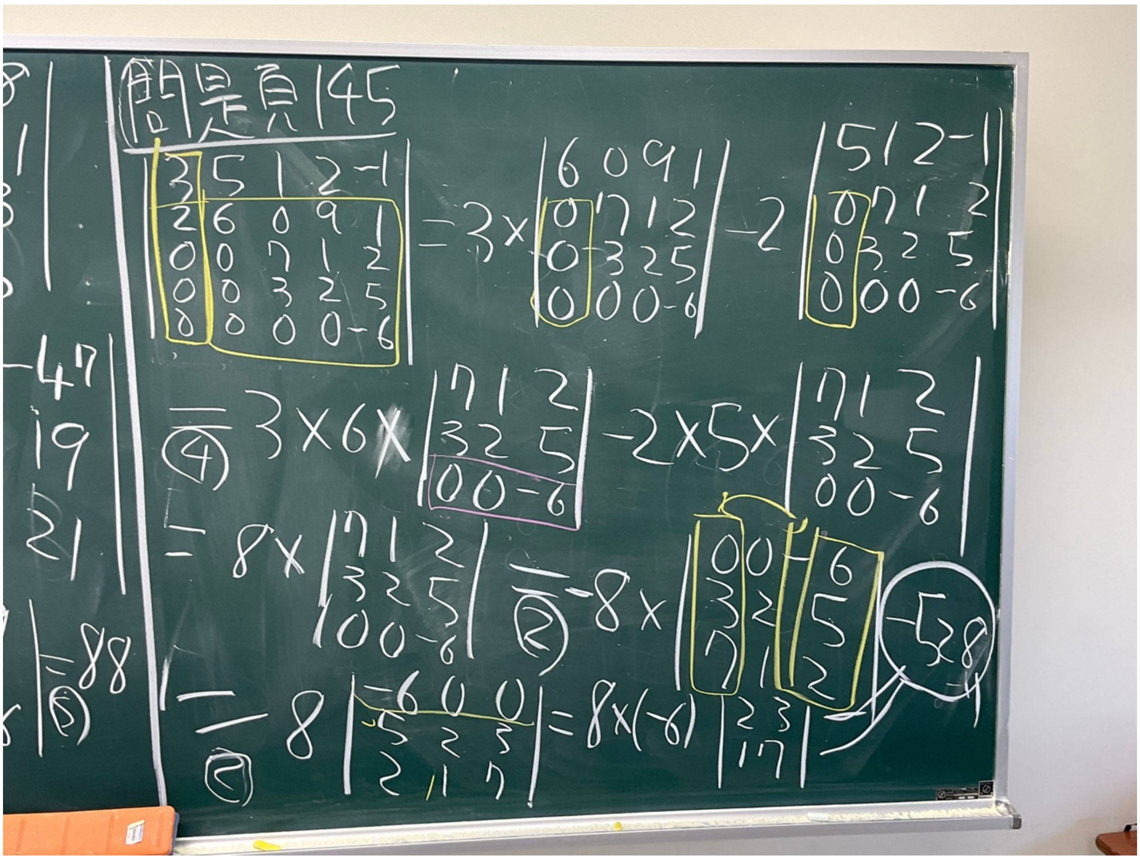
例43

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 13 & 5 \\ 5 & 3 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{展開}}{\overset{\text{余因子}}{=}} 2 \times \begin{vmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 0 & 9 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} - (5) \times \begin{vmatrix} 7 & 13 & 5 \\ 0 & 9 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{④}{=} 2 \times 3 \times \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 5 \times 7 \times \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 6 \times 17 - 5 \times 7 \times 17 = -493.$$


②
|2 -4 -5 3|
|-6 13 14 1|
|1 -2 -2 -8|
|2 -5 0 5|
=② -1 |1 -2 -2 -8| |-6 13 14 1| |2 -4 -5 3| |2 -5 0 5|
=③ -1 |1 -2 -2 -8| |0 1 2 -47| |0 0 -1 19| |0 -1 4 21|
=④ -1× |1 2 -47| |0 -1 19| |-1 4 21|
=⑤ (-1)× |1 2 -47| |0 -1 19| |0 6 -26|
=④ (-1) |-1 19| |6 -26|
=⑤ 88


問是頁145
|3 5 1 2 -1| |2 6 0 9 1| |0 0 7 1 2| |0 0 3 2 5| |0 0 0 0 -6|
=3× |6 0 9 1| |0 7 1 2| |0 3 2 5| |0 0 0 -6| -2 |5 1 2 -1| |0 7 1 2| |0 3 2 5| |0 0 0 -6|
=④ 3×6× |7 1 2| |3 2 5| |0 0 -6| -2×5× |7 1 2| |3 2 5| |0 0 -6|
=8× |7 1 2| |3 2 5| |0 0 -6|
=② -8× |0 0 -6| |3 2 5| |7 1 2|
-528
=⑦ -8 |-6 0 0| |5 2 3| |2 1 7| =8×(-6) |2 3| |1 7|

定理138(余因子展開)の証明

$f:\{n次正方行列\}\to\mathbb{R}$

$A=(a_{ij})\longmapsto a_{11}\det A_{11}$
$-a_{21}\det A_{21}$
$+(-1)^{n+1}\det A_{n1}$ とする

fは②多重線形性、③交代性と① $f(E_n)=1$ をみたすので、

detの一意性より $\det=f$

§3節 定義 $A=(a_{ij})$ n次正方について

(i,j)成分の余因子 $\tilde{a}_{ij}$ を

$\tilde{a}_{ij}=(-1)^{i+j}\det A_{ij}$ とする

$\tilde{a}_{1j}=(-1)^{1+j}\det A_{1j}$ より

$a_{11}\tilde{a}_{11}+a_{21}\tilde{a}_{21}+\cdots+a_{n1}\tilde{a}_{n1}$

$=a_{11}\det A_{11}-a_{21}\det A_{21}+a_{31}\det A_{31}$
$\cdots+(-1)^{1+n}a_{n1}\det A_{n1}=\det A$

定理14.7（教科書定理3.4(1)）

$$\det(A) = a_{1j}\tilde{a}_{1j} + a_{2j}\tilde{a}_{2j} + \cdots + a_{nj}\tilde{a}_{nj}$$

（$j=1$の式が左）

また $(k \neq j)$

$$0 = a_{1k}\tilde{a}_{1j} + a_{2k}\tilde{a}_{2j} + \cdots + a_{nk}\tilde{a}_{nj}$$

$\boxed{\text{証}}$

$$0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n1} & & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\tilde{a}_{12} + a_{21}\tilde{a}_{22} + \cdots + a_{n1}\tilde{a}_{n2}$$

$k=1, j=2$ の式

$\boxed{\text{定義}}$ $A=(a_{ij})$ の余因子行列 $\tilde{A}$ を

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \cdots & \tilde{a}_{n1} \\ \tilde{a}_{12} & & & \\ \vdots & & & \\ \tilde{a}_{1n} & & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

（添字が逆）　$\left(A^{-1} = \dfrac{\tilde{A}}{\det A} \right)$

$\boxed{\text{定理}}$ $A \cdot \tilde{A} = \tilde{A} A = (\det A) E_n$

— とくに $\det A \neq 0$ なら A は正則

証

$$(A\tilde{A})_{11} \overset{\text{ていぎ}}{=} \sum_{j=1}^{n} A_{1j}\tilde{A}_{j1}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\tilde{a}_{1j} \overset{\text{右}}{=} \det A$$

$(\tilde{A}_{j1} = \tilde{a}_{1j})$

$$(A\tilde{A})_{12} = \sum_{j=1}^{n} A_{1j}\tilde{A}_{j2}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\tilde{a}_{2j} = 0$$

1行目
2列目
くりぬく

$\boxed{//}$

例 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$A_{11} = (d)$ $\quad \tilde{a}_{11} = d$

$A_{12} = (c)$ ⤳ $\tilde{a}_{12} = -c$

$A_{21} = (b)$ $\quad \tilde{a}_{21} = -b$

$A_{22} = (a)$ $\quad \tilde{a}_{22} = a$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$A\tilde{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$$A\tilde{A} = (ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (\det A)E_2$$

例12　$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\tilde{A}$ は?

$A_{11} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$

A_{12} $\det\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ = 9回 → $\tilde{A} = (\quad)$

めんどい

$\tilde{A} = \frac{1}{\det A} A^{-1}$　$\tilde{A}$をつかってA^{-1}をもとめることができる

定理 ① $\det A \neq 0 \iff A$ 正則

② $AB = E_n$ ならAは正則で $A^{-1} = B$

証 ① $\det A \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{\det A}$ となる

Aが正則 $\Rightarrow A \cdot A^{-1} = E_n$

$\Rightarrow \det(AA^{-1}) = \det E_n = 1$

$\det A \times \det A^{-1} \Rightarrow \det A \neq 0$

② $AB = E_n \Rightarrow \det A \times \det B = \det E_n = 1$

$\Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow A$ 正則

定理 クラメルの公式

A 正則 n 次正方行列

$A=(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n)$ $\vec{a}_i\in\mathbb{R}^n$ とかけるとき

$A\vec{x}=\vec{b}$ の解は

$\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ として $x_i=\dfrac{\det(\vec{a}_1\ldots\overset{i}{\vec{b}}\ldots\vec{a}_n)}{\det A}$ となる

(実用的でない)

例 $A=\left(\underset{a_1}{\begin{matrix}5\\3\end{matrix}}\ \underset{a_2}{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}}\right)$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ $A\vec{x}=\vec{b}$ の解

$x_1=\dfrac{\det\begin{pmatrix}3&1\\2&2\end{pmatrix}}{\det A}=\dfrac{4}{7}$, $x_2=\dfrac{\det\begin{pmatrix}5&3\\3&2\end{pmatrix}}{\det A}=\dfrac{1}{7}$

証 $A\vec{x}=x_1\vec{a}_1+x_2\vec{a}_2+\cdots+x_n\vec{a}_n$ より

$\det(\vec{b},\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n)=x_1\det(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n)+x_2\det(\vec{a}_2,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n)+\cdots$

$=x_1\det(\vec{a}_1\ldots\vec{a}_n)=x_1\det A$