$\boxed{1-1.}$ $\boxed{\text{まとめ123のようにする}}$

① 拡大係数行列は
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 9 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 7 & 1 & 7 \end{array}\right)$$
である

$\qquad\qquad A \qquad\qquad b$

② これを簡約化すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 9 & 1 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(中間レポート)}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\qquad\qquad C \qquad\qquad d$

③ $Cx = d$ を求める

つまり
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$
をとく

つまり
$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1 \\ x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_4 = 3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

よって解は
$$\begin{cases} x_1 = 1-2t \\ x_2 = 2-3t \\ x_3 = t \\ x_4 = 3 \end{cases}$$
(t 実数)//

$\boxed{1\text{-}2}$

① 拡大係数行列は
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 & 3 \end{array}\right)$$ 2す1

A b

② これを簡約化すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -18 & 0 \end{pmatrix}$$

$-2\ -2\ 4\ -2\ -6\ -2$

$-3\ -3\ 6\ -3\ -9\ -3$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -18 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -18 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

c　d

③ $Cx = d$ を解く

つまり $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を解く

つまり $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$ を解く

$\boxed{\text{解答}}$ $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2s \\ x_3 = s \\ x_4 = -3t \\ x_5 = t \end{cases}$ (s, t) 実数.

//

② ①

拡大係数行列は

$$\begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & a \end{array}\right) \\ \begin{array}{cc} \quad A \quad & \quad b \end{array}\end{array}$$

である

②

これを簡約化すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & a-6 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6-a \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5-a \end{array}\right) \\ \begin{array}{cc} \quad C \quad & \quad d' \end{array}\end{array}$$

$\boxed{3}$ $C\vec{x}=\vec{d}$ をとくと

$$\begin{cases} x_1 \quad - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ 0 = 5-a \end{cases}$$

よって $a \neq 5$ なら解がなく

$a=5$ なら

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ 1-s \\ s \end{pmatrix} \quad (s\text{任意})$$

という解がある

答 $a=5$

3. (1) $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$\mathrm{Ker}A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = 0\}$

$\mathrm{Image}A = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^m \mid$ ある $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ があって $\vec{y} = A\vec{x}\}$.

(2) $\vec{y_1}, \vec{y_2} \in \mathrm{Image}A$ なら

ある $\vec{x_1}, \vec{x_2} \in \mathbb{R}^n$ で

$\vec{y_1} = A\vec{x_1}$ かつ $\vec{y_2} = A\vec{x_2}$ となる

よって $2\vec{y_1} + 3\vec{y_2}$

$= 2A\vec{x_1} + 3A\vec{x_2}$

$= A(2\vec{x_1} + 3\vec{x_2})$ となる.

よって $2\vec{y_1} + 3\vec{y_2} \in \mathrm{Image}A$ である。

④ $A = \mathbb{R}^{5}_{n} \to \mathbb{R}^{4}_{m}$ とする

資料まとめ120のとおりになる

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 9 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 7 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$ の簡約化は

$$B = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & & 4 & \end{array} \end{array}$$ である

(2) $\operatorname{rank} A = 3 = \dim \operatorname{Image} A$.

(3) B の 1（主成分）があらわれた列の位置は $1, 2, 4$

よって $A = (\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}, \vec{a_4}, \vec{a_5})$

$$
= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 9 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 5 \\ 12 & 1 & 7 & 1 & 7 \end{pmatrix}
$$

とかけるので

ImageAの基底は $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_4}$ がある

つまり $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

④ $\dim \mathrm{Ker} A$

$= n - \dim \mathrm{Image} A$

$= 5 - 3 = 2$

⑤ まず

$B\vec{x} = 0$ の解を求める

これは
$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 + 3x_3 + 2x_5 = 0 \\ x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

より
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2s-t \\ -3s-2t \\ s \\ -3t \\ t \end{pmatrix}$$
となる

よって
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \underset{s}{t_1} \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{b}_1} + \underset{t}{t_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{b}_2}$$
とおける。

この $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ が $\ker A$ の基底となる

つまり

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{と} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$ $\boxed{//}$

$\boxed{\text{補足}}$

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 1 & 5 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 9 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 7 & 1 & 7 \end{array}\right) \text{とし}$$

$$\begin{array}{ccccc} \vec{a_1} & \vec{a_2} & \vec{a_3} & \vec{a_4} & \vec{a_5} \end{array}$$

$$\mathrm{Image}\,A = \mathrm{Span}(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}, \vec{a_4}, \vec{a_5})$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^{5} \lambda_i \vec{a_i} \;\middle|\; \lambda_i \in \mathbb{R} \right\} \text{である}$$

$\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_4}$ はプリントの

注意 をみたす

ⓐ $\mathrm{rank}(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_4}) = 3$

（実は簡約化からわかる）

(b) 任意の $\vec{y} \in \mathrm{Image}\,A$ について

$$\vec{y} = \lambda_1 \vec{a_1} + \lambda_2 \vec{a_2} + \lambda_3 \vec{a_4}$$

となる

これは

$$\vec{a_3} = 2\vec{a_1} + \vec{a_2}$$

$$\vec{a_5} = \vec{a_1} + 2\vec{a_2} + 3\vec{a_4}$$

とかけることから

より

$\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_4}$ は

$\mathrm{Span}(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}, \vec{a_4}, \vec{a_5})$

の基底でもある

⑤ まとめ121のようにする

$$A = (\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}, \vec{a_4}, \vec{a_5})$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$ とおく

$$W = \mathrm{Image}\,A.$$

Aの簡約化は

$$B = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & & & \end{array} \end{array}$$

よって Wの次元は

$$\dim W = \dim \mathrm{Image} A = \mathrm{rank} A = 2$$

基底(の例)は a_1, a_2

(主成分が1, 2列目にあるから)

つまり $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

確認 $\vec{a_1}, \vec{a_2}$ はたしかに
注意1 をみたす

ⓐ $\mathrm{rank}(\vec{a_1}, \vec{a_2}) = 2$.

($\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ を簡約化してわかる)

ⓑ 任意の $\vec{x} \in W$ について
$\vec{x} = \lambda_1 \vec{a_1} + \lambda_2 \vec{a_2}$ とかける.

これは $\vec{a_3}, \vec{a_4}, \vec{a_5}$ が
$\vec{a_1}, \vec{a_2}$ でかけることをみる.

$$\vec{a_3} = -\vec{a_1} + 2\vec{a_2}$$
$$\vec{a_4} = -2\vec{a_1} + 3\vec{a_2}$$
$$\vec{a_5} = -3\vec{a_1} + 4\vec{a_2}$$

より成り立つ。

$\boxed{6-1}$

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 14 \\ -5 & 6 & 7 \\ 10 & 3 & -7 \end{vmatrix} = 5\times 3\times 7 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 105\times \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -5 \end{vmatrix}$$

$2 \ -2 \ 4$

$$= 105 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{r} 105 \\ 14 \\ \hline 420 \\ 105 \end{array}$$

$$= 105\times(-(9+5))$$

$$= 105\times(-14) = -1470 \quad //$$

$\boxed{6-2}$

(1列目と2列目の入れかえ)

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -3\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

2 2 4
3 3 6

$$= 3 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \times \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -2 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \times (-12 - 10) = 3 \times (-22)$$

$$= -66 \,//$$

(6-3)

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & 2 & 6 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 6 \begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -6 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -12 \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -12(-2-4) = 72$$

$\boxed{6-4}$

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 7 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & 3 & 7 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

余因子展開

$$= -5\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 7 & 0 & -1 \\ 1 & 7 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -10\begin{vmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$+ 3\begin{vmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 7 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -7\begin{vmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 7 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -7(50 + 6 - 35 + 6)$$

15
12

$$+5(25+3)$$

$$-1(-3-35)$$

$$= -7 \times 27 + 5 \times 28 + 38$$

$$= -1\overset{4}{8}9 + 140 + 38$$

$$= -189 + 178 = -11 \quad //$$

$\boxed{1-1}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & x & 3 \\ x & -2 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ 2 & x & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x-1 & 1 \\ 0 & x-2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & x-1 & 1 \\ x-2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} x-2 & 0 & 0 \\ 1 & x-1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -(x-2) \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(x-2)(x-1)$$

$\boxed{(1)\text{-}2}$ Aが逆行列を持たない

$\Longleftrightarrow$ Aが正則でない

$\Longleftrightarrow$ $\det A = 0$ より

$-(x-2)(x-1)=0$ なるx、つまり

$x=2, 1$ が答えである//

$\boxed{\text{補足}}$ A = n次正方行列にて

$\det A \neq 0 \Longleftrightarrow$ Aが正則

定理154 (逆行列A^{-1}がある)

$\Longleftrightarrow$ $\operatorname{rank} A = n$

定理105

$\Longleftrightarrow$ $AB = E_n$ なるn次正方行列がある

命題106〜定理154

よって

$$\det A = 0 \iff A\text{は正則でない} \iff \operatorname{rank} A < n$$ ☒

である.

$\boxed{8}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする.

$$\widetilde{a_{11}} = (-1)^{1+1} \det A_{11}$$
$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\widetilde{a_{12}} = (-1)^{1+2} \det (A_{12})$$
$$= -\det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\widetilde{a_{13}} = (-1)^{1+3} \det A_{13}$$
$$= \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\widetilde{a_{21}} = (-1)^{2+1} \det A_{21}$$
$$= -\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -2$$

$$\widetilde{a_{22}} = (-1)^{2+2} \det A_{22}$$
$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\widetilde{a_{23}} = (-1)^{2+3} \det A_{23}$$
$$= -\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\widetilde{a_{31}} = (-1)^{3+1} \det A_{31}$$
$$= \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1$$

$$\widetilde{a_{32}} = (-1)^{3+2} \det A_{32}$$
$$= -\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -2$$

$$\widetilde{a_{33}} = (-1)^{3+3} \det A_{33}$$
$$= \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

よって

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \widetilde{a_{11}} & \widetilde{a_{21}} & \widetilde{a_{31}} \\ \widetilde{a_{12}} & \widetilde{a_{22}} & \widetilde{a_{32}} \\ \widetilde{a_{13}} & \widetilde{a_{23}} & \widetilde{a_{33}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

また

$$A \cdot \widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3 \quad //$$

($\det A = 1$ より

$A \cdot \widetilde{A} = (\det A) E_3$ からでも求まる)

9-1 定理135より $\det(AB) = (\det A)\times(\det B)$ となるので

$$\det(ABC)$$
$$= (\det A)\times(\det B)\times(\det C)$$
$$= (\det B)\times(\det A)\times(\det C)$$
$$= \det(BAC)$$

9-2 $\boxed{7}$ の補足より

Aが正則でない $\Leftrightarrow \det A = 0$ より

Aが正則でない

$$\Rightarrow \det A = 0$$
$$\Rightarrow \det(AB) = (\det A)\times(\det B) = 0$$

$\Rightarrow$ ABも正則でない