期末試験の情報

2025 年度春夏学期 大阪大学 全学共通教育科目 線形代数学 1 工 (然 56-110)

期末試験の情報は次のとおりです.

1. 日時: 2025 年 7 月 31 日 木曜 2 限 (10:30-12:00) 10:15 までにこの教室に来てください.
2. 場所: 共 C302 (授業の部屋)
3. 持ち込みに関して: A4 用紙 4 枚 (裏表使用可) のみ持ち込み可. 工夫を凝らして A4 用紙 4 枚に今までの内容をまとめてください. (A4 用紙はこの用紙のサイズです.) A4 より大きいサイズの紙を用いた場合, その用紙を没収します. その他 (教科書, スマートフォン, 携帯) は使用できません.
4. 試験内容: 授業でやった範囲

以下は注意事項です.

- 解答に関して, 答えのみならず, 答えを導出する過程をきちんと記してください. きちんと記していない場合は大幅に減点する場合がある.
- レポート問題 (6/5 と 7/17) の何問かを数値や表現など少し変えて出す予定です. そのため何をやればいいかわからない人は, 最低限として演習問題を解けるようにしてください. また単位を認定するくらいの成績が取れていない場合, 容赦無く不可を出します.
- 途中退出は 11:00-11:45 までとします. 試験が早く解けたものや諦めたものはこの時間に試験を提出し, その後退出してください.
- 試験対策として作った A4 用紙 4 枚は試験後も捨てずに置いておくことをお勧めします. なぜならこの用紙 4 枚にこの授業で学ぶべき内容が詰まっているからです.

レポート問題及び授業の資料・板書内容は CLE や授業ページ (`https://masataka123.github.io/2025_summer_linear_algebra/`) にもあります. 下の QR コードからを読み込んでも構いません.

中間レポート 2

提出締め切り 2025 年 7 月 31 日 (木) 23 時 59 分 00 秒 (日本標準時刻)

提出方法

- 提出に関しては CLE を用いて提出すること．締め切りは 2025 年 7 月 31 日 (木) 23 時 59 分 00 秒 (日本標準時刻) である．
- 次のレポート問題について解答すること．解答に関しては答えのみならず, 答えを導出する過程をきちんと記すこと．
- レポートの解答は CLE にすでにあります．レポート問題の何問かを期末試験に出す予定です．試験対策としてこのレポートを解いていただければと思います．(解答の丸写しなどの行為は時間の無駄なのでしないでください．)

レポート問題

問題 1．次の連立 1 次方程式を解け．

(1)．
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + 4x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + x_4 = 7 \end{cases}$$

(2)．
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 - 9x_5 = 3 \end{cases}$$

問題 2．連立 1 次方程式 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = a \end{cases}$ の解が存在するような a の値を全て求めよ．

問題 3．A を $m \times n$ 行列とし, A で定義された線形写像

$$\begin{array}{rccc} A: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ & \boldsymbol{x} & \longmapsto & A\boldsymbol{x} \end{array}$$

とする．次の問いに答えよ．

(1)．像 $\mathrm{Image}A$ と核 $\mathrm{Ker}A$ の定義をそれぞれ書け．

(2)．$\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in \mathrm{Image}A$ ならば $2\boldsymbol{y}_1 + 3\boldsymbol{y}_2 \in \mathrm{Image}A$ であることを示せ．

問題 4．$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 9 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 7 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ とし, $\begin{array}{rccc} A: & \mathbb{R}^5 & \to & \mathbb{R}^4 \\ & \boldsymbol{x} & \longmapsto & A\boldsymbol{x} \end{array}$ とする．この線形写像の像 $\mathrm{Image}A$ と核 $\mathrm{Ker}A$ の次元を求め, それらの線形部分空間としての基底を一組示せ．

問題 5. $\mathbb{R}^4$ において

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_5 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

とし, $W = \mathrm{Span}(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_5) = \{\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + \lambda_5 \boldsymbol{a}_5 | \lambda_1, \ldots \lambda_5 \in \mathbb{R}\}$ とする. W の次元を求め, W の線形部分空間としての基底を一組示せ.

> **注意 1** (基底についての補足)**.** 「$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r \in \mathbb{R}^n$ が線形部分空間 $W \subset \mathbb{R}^n$ の基底である」とは次の二つが成り立つことと同値である.
>
> (a) (一次独立性) $\mathrm{rank}(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r) = r$
>
> (b) (生成性) 任意の $\boldsymbol{x} \in W$ について, $\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + \lambda_r \boldsymbol{a}_r$ となる $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ が存在する.

問題 6. 次の行列の行列式をそれぞれ求めよ.

(1). $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 14 \\ -5 & 6 & 7 \\ 10 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ (2). $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (3). $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & 2 & 6 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ (4). $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 7 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

問題 7. x を実数とし, 4×4 行列 A を次のように定める.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & x & 3 \\ x & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

次の問いに答えよ.

(1). A の行列式を x を用いて表せ.

(2). A が逆行列を持たないような x の値を全て求めよ.

問題 8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とし A の余因子行列を $\widetilde{A}$ とする. $\widetilde{A}$ と $A\widetilde{A}$ をそれぞれ求めよ.

問題 9. 次の問題に答えよ. ただし解答に際し授業・教科書で証明を与えた定理に関しては自由に用いて良い.

(1). n 次正方行列 A, B, C について, $\det(ABC) = \det(BAC)$ であることを示せ.

(2). n 次正方行列 A, B について, A が正則行列でないならば, AB も正則行列ではないことを示せ.