1/7 休講
1/14 演習
1/21 試験

3×3 行列式

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

これでdetが一意に定まる

行列式…$n \times n$まで拡張できる

性質

- i行とj行をいれかえると -1倍 ← 行基本変形
- i行をa倍すると a倍
- i行にj行のc倍をたしてもかわらない
- $\det\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ 0 & & \ddots \; a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \times \cdots \times a_{nn}$ (とくに $\det(E_n) = 1$)

これでdetが一意に定まる →

2×2行列で成りたったことは $n \times n$ でもなりたつ

$\det A \neq 0 \iff A$が正則 (A^{-1}がある)

$\det AB = (\det A)(\det B)$

3×3の対角化（2×2と同じくしてできる）

$\boxed{例}$ $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&4\\0&0&4\end{pmatrix}$ を対角化する。

$\boxed{手順1}$ $\det(A-tE_3)=\det\begin{pmatrix}1-t&1&1\\0&2-t&4\\0&0&4-t\end{pmatrix}$

$=(1-t)(2-t)(4-t)$

$=0$ の解は $t=\underbrace{1}_{\lambda_1},\ \underbrace{2}_{\lambda_2},\ \underbrace{4}_{\lambda_3}$

$\boxed{手順2}$ $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ なる $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ を1つもとめる

理由
行基本変形は正則行列で表せるから

（2×2と同じくしてできる）
$\begin{pmatrix}1-t&1&1\\0&2-t&4\\0&0&4-t\end{pmatrix}$
理由
行基本変形は正則行列で表せるから
$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ を1つもとめる

→ $\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&4\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ ⇝ $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}_{v_1}$ とか

$\lambda_2 \cdots \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \cdots v_2$ とか、

$\lambda_3 \cdots \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \cdots v_3$

$\boxed{手順3}$ $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&1\end{pmatrix}$（$v_1$, v_2, v_3）とおくと $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{pmatrix}$

簡約化のいいかえ

$m\times n$ 行列 A について正則行列 R があって
RA が簡約行列になる