前回：簡約化

$$\text{行列}A \xrightarrow{\text{行基本変形}} B\ (\text{簡約行列})$$

例 $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

行基本変形
- 1つの行 $a$倍 $(a \neq 0)$
- 行のいれかえ
- 1つの行にある行の$c$倍たす

今日 これを使って連立1次方程式をとく

定義 $m$個の式からなる$n$変数連立1次方程式

$$(☆)\quad \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$

について

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \text{とおく.}$$

$m \times n$行列　　$n \times 1$行列　　$m \times 1$行列

$A$を係数行列といい

$$[A \,\vdots\, \vec{b}] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$ を

拡大係数行列という。

$\boxed{\text{補足}}$

☆の方程式 $\Longleftrightarrow A\vec{x} = \vec{b}$

$\boxed{\text{例}}$ $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 1x - 4y = 9 \end{cases}$ について $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$.

拡大係数行列 $[A \,\vdots\, \vec{b}] = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \end{array}\right)$

$\boxed{\text{例}}$ $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 1x_3 + 4x_4 = 7 \\ 1x_1 \quad 0 \quad - 3x_3 + 1x_4 = 5 \\ 2x_1 - 1x_2 + 9x_3 \quad 0 \quad = 0 \end{cases} \leadsto A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 9 & 0 \end{pmatrix}$

拡大係数行列 $[A \,\vdots\, \vec{b}] = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 1 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 9 & 0 & 0 \end{array}\right)$

連立1次方程式のときかた.

・ $A\vec{x}=\vec{b}$ をとくには次の手順でとく.

**手順1** $A\vec{x}=\vec{b}$ から拡大係数行列 $[A:\vec{b}]$ をつくる.

**手順2** $[A:\vec{b}] \underset{\text{簡約化}}{\rightsquigarrow} [C:\vec{d}]$

**手順3** $C\vec{x}=\vec{d}$ をとく.

これは簡単にとける形になってる.

**例**
$$\begin{cases} x_1-2x_2 \qquad\qquad +3x_4 \qquad = 2 \\ x_1-2x_2+x_3+2x_4+x_5=2 \\ 2x_1-4x_2+x_3+5x_4+2x_5=5 \end{cases}$$

**手順1** 拡大係数行列
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

**手順2** こいつを簡約化する

$[A:\vec{b}]$
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{2行}-(\text{1行})]{③} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{3行}+(-2)\times\text{1行}]{③} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{3\text{行目}\\-(2)\text{行目}}]{②}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{2\text{行目}\\-3\text{行目}}]{③}\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)$$

$$\underbrace{\hphantom{xxxx}}_{C}\qquad \underbrace{\hphantom{x}}_{\vec{d}}$$

手順3 $C\vec{x}=\vec{d}$ をとく

つまり
$$\begin{cases} \boxed{x_1}-2x_2+3x_4 = 2\\ \boxed{x_3}-x_4 = -1\\ \boxed{x_5} = 1\end{cases}$$
をとく

$$(\Leftrightarrow)\begin{cases} x_1 = 2+2x_2-3x_4\\ x_3 = -1+x_4\\ x_5 = 1\end{cases}$$

なので解は
$$\begin{cases} x_1 = 2+2c_2-3c_4\\ x_2 = c_2\\ x_3 = -1+c_4\\ x_4 = c_4\\ x_5 = 1\end{cases}$$
($c_2, c_4$ 任意定数)
となる

もしくは
$$\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\\ 0\\ -1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix} 2\\ 1\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} -3\\ 0\\ 1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$$
($s, t$ 定数)
とかいてもよい

例

$$\begin{cases} x_1 \qquad - x_3 \qquad - 2x_5 = 1 \\ \quad x_2 + x_3 \qquad + x_5 = -2 \\ -x_1 \qquad + x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \qquad - 3x_5 = 1 \end{cases}$$

をとく

手順1

拡大係数行列 $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$

手順2 こいつを簡約化する

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)}_{A \quad \vec{b}} \xrightarrow{③} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

(3行目+(1行目)
4行目+(-2)×1行目)

$$\xrightarrow{③} \left(\begin{array}{cccccc} \boxed{1} & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

(4行目
−(2行目))

①
$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{array}\right)$$

(4行目×(−1))

③
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$C$　$\vec{d}$

1行目−(4行目)
2行目+2×(4行目)
3行目−4×(4行目)

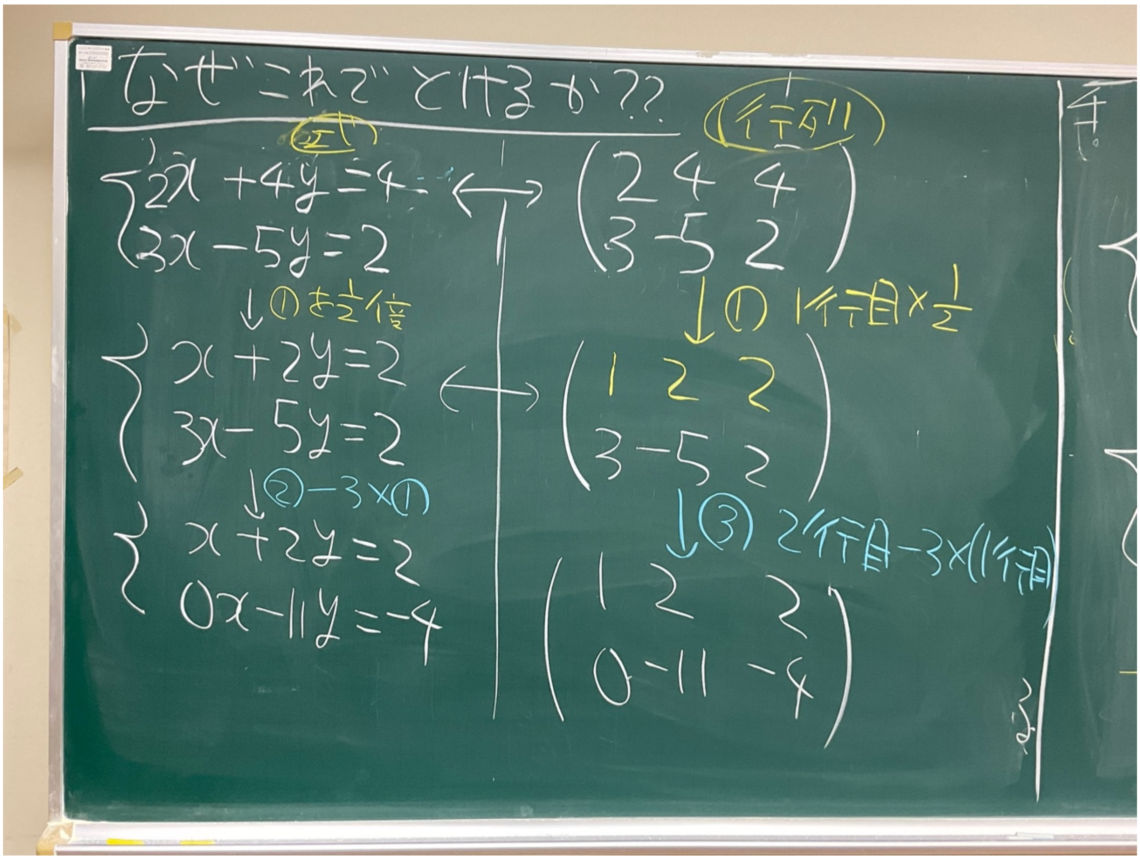
例題3　$C\vec{x}=\vec{d}$ をとく.

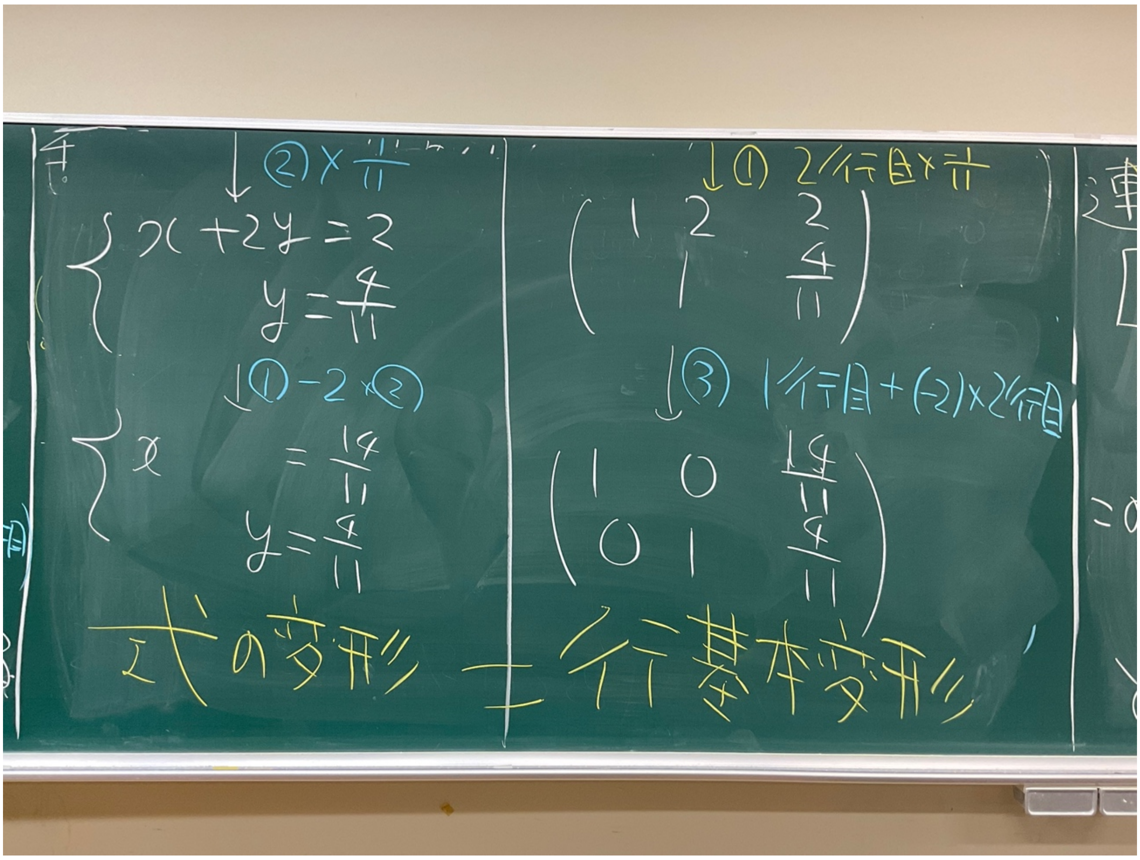
つまり
$$\begin{cases} x_1 - x_3 - 2x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_5 = 0 \\ x_4 - x_5 = 0 \\ \boxed{0x_1+0x_2+0x_3+0x_4+0x_5 = 1} \end{cases}$$

これは解はない

答え
解なし

もし解があれば、4番目の式から0=1となり矛盾するから


なぜこれでとけるか??
式
行列
2x+4y=4
3x−5y=2
⟷
2 4 4
3 −5 2
↓① 1/2倍
↓① 1行目×1/2
x+2y=2
3x−5y=2
⟷
1 2 2
3 −5 2
↓②−3×①
↓③ 2行目−3×(1行目)
x+2y=2
0x−11y=−4
1 2 2
0 −11 −4


↓②×(−1/11)
↓① 2行目×(−1/11)
x+2y=2
y=4/11
1 2 2
0 1 4/11
↓①−2×②
↓③ 1行目+(−2)×2行目
x=14/11
y=4/11
1 0 14/11
0 1 4/11
式の変形 = 行基本変形

連立1次方程式 $A\vec{x}=\vec{b}$ について

$[A \vdots \vec{b}] \rightsquigarrow [C \vdots \vec{d}]$

簡約化

$(A \rightsquigarrow C$

簡約化

このとき、

① $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}[A \vdots \vec{b}]$

② $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}[A \vdots \vec{b}] - 1$

となる

---

① $\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \vdots \\ \hline & O & & 0 \end{array}\right) \Longleftrightarrow$ 解あり

② $\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \vdots \\ \hline & O & & 1 \\ & & & \vdots \end{array}\right) \Longleftrightarrow$ 解がない

0=1となってしまう

(さっきの例のような)

**定理** $A\vec{x}=\vec{b}$ が解がある $\Longleftrightarrow \operatorname{rank} A = \operatorname{rank}[A \vdots \vec{b}]$