前回 行列のたし算ひき算かけ算

今日、来週

連立1次方程式をとく

↑ ① 行基本変形
② 簡約化

定義 行列において、それぞれの行の最初に現れる0でない成分を主成分という

例

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 1 \\ \boxed{1} & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

□…主成分

定義 行列Aが簡約行列とは次の4つ条件をみたすものとする。

(1が右下の階段になっている行列)

① 主成分は全て1

② 主成分を持つ列は、その主成分を除くすべて0

③ 右側の列にいくほど主成分は下側

④ 全ての成分が0である行は0以外の値を含む行より下側にある

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

① ok ② ok ③ ok ④ ok

ダメな例

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

①がダメ

0でない ②ダメ

③がダメ

④ダメ

定義 行基本変形

次の3つの変形を行基本変形という

① 1つの行を a 倍する $(a \neq 0)$

② 2つの行をいれかえる

③ 1つの行に他の行の c 倍をたす (cは0でも可)

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ ① 1行目を2倍.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$ ② 1行目と2行目を交換

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$ ③ 2行目に1行目の2倍をたす

ダメな変形

$\begin{pmatrix}1&3&2\\0&1&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$ × （①で0倍は不可）

$\begin{pmatrix}1&3&2\\0&1&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}3&1&2\\1&0&1\end{pmatrix}$ × 列の交換も不可.

$\boxed{\text{定理}}$ 任意の行列Aは行基本変形をすることで簡約行列Bにすることができ、それは唯1つに定まる

この操作をAの簡約化といって Bを A の簡約行列という $\left(A \xrightarrow[\text{変形}]{\text{行基本}} B_{(\text{簡約})}\right)$

$\boxed{\text{例}}$

$\begin{pmatrix}1&2&-3\\1&1&1\end{pmatrix} \xrightarrow{③} \begin{pmatrix}1&2&-3\\0&-1&4\end{pmatrix}$ ③ 2行目に1行目の(-1)倍をたす

$\xrightarrow{①} \begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-4\end{pmatrix}$ ① 2行目を(-1)倍する

$\xrightarrow{③} \begin{pmatrix}1&0&5\\0&1&-4\end{pmatrix}$ ③ 1行目に2行目の(-2)倍たす.

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

実際

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{③} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

③ 2行目に1行目×(−2)をたす。

$$\xrightarrow{③} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

③ 3行目に2行目×(−1)をたす。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{①} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

① 3行目を $\frac{1}{4}$ 倍する

$$\xrightarrow{③} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

③ 1行目に3行目×(−2)をたす

$$\xrightarrow{③} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

③ 2行目に3行目×3をたす

$\boxed{例1}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & -9 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{変形}]{\text{行基本}} \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{pmatrix} \text{簡約}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & -9 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{②} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & -6 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & -9 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

②1行目と3行目の交換

$$\xrightarrow{①} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{3} & 6 & -9 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

①1行目を$\left(\frac{1}{2}\right)$倍する

$$\xrightarrow{③} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

③2行目に1行目×(-3)をたす

$$\xrightarrow{②} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

②2行目と3行目を交換

$$\xrightarrow{①} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \boxed{-3} & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

①2行目を$\left(\frac{1}{2}\right)$倍する

$$\xrightarrow{③} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{5}{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 4 \end{pmatrix}$$

③1行目に2行目の3倍たす

$$\xrightarrow{①} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{5}{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

①3行目を$\frac{1}{2}$倍する

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{5}{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{③} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{pmatrix}$$

③ 1行目に 3行目×$\left(-\frac{5}{2}\right)$をたす

$$\xrightarrow{③} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

③ 2行目に 3行目×$\left(-\frac{3}{2}\right)$をたす

(注) 試験等では

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

とかいてよい

定義 行列Aにたいし、BをAの簡約化とする
rank(A)をBのゼロベクトルでない行のこすうとする
(これをランク、階数という

$$A \xrightarrow[\text{変形}]{\text{行基本}} B\ (\text{簡約})$$

例)

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} ○ \\ ○ \\ × \end{array} = 2$$

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ × \end{array} = 2$$

例 $\begin{pmatrix}1&2&-3\\1&1&1\end{pmatrix}$ の階数は

$\begin{pmatrix}1&2&-3\\1&1&1\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{簡約化}]{} \begin{pmatrix}1&0&5\\0&1&-4\end{pmatrix}$ より階数は2

例 $\begin{pmatrix}0&0&0&2&3&2\\0&3&6&-9&-4&7\\0&2&4&-6&-4&2\end{pmatrix}$ の階数は

$\begin{pmatrix}0&0&0&2&3&2\\0&3&6&-9&-4&7\\0&2&4&-6&-4&2\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix}0&1&2&0&0&-1\\0&0&0&1&0&-2\\0&0&0&0&1&2\end{pmatrix}$ より階数3

簡約化の証明は

行基本変形で簡約化できる

アルゴリズムが存在することから言える

(Gauss-Jordanの掃き出し法)

ガウス　ジョルダン