$\boxed{\text{授業の後半}}$

◦ 連立一次方程式を
頭を使わずにとく

◦ $\begin{cases} x+2y=6 \\ 3x-4y=5 \end{cases}$ （機械的に）（プログラミング的に）

◦ $\begin{cases} x+4y-6z+5w=1 \\ 2x-y+6z-w=2 \\ 3x-5y+3z-7w=3 \end{cases}$

5 行列の演算

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ を (a_{ij}), $[a_{ij}]$ と略記することもある

$\boxed{\text{定義}}$ A, B を $m\times n$ 行列とするとき

$A+B$ を各成分の足し算で定義する

$A-B$ を 〃 引き算で 〃

$\boxed{\text{例1}}$ $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 8\\ 2 & 5 & -1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}-2 & 5 & 1\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}$ とする.

$$A+B=\begin{pmatrix}1+(-2) & -2+5 & 8+1\\ 2+3 & 5+(-1) & -1+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 9\\ 5 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix}1-(-2) & -2-5 & 8-1\\ 2-3 & 5-(-1) & -1-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -7 & 7\\ -1 & 6 & -3\end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{例2}}$ $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 4 & 6 & 7\end{pmatrix}$ のとき

$A+B$ は できない

$\left(\begin{array}{l}A\ 2\times 2\ \text{行列}\\ B\ 2\times 3\ \text{行列}\end{array}\right)$

2×2 同様 $A\pm B=B\pm A$ などが

なりたつ(資料7参照)

定義（行列のスカラー倍）

A: $m \times n$ 行列, c 数（スカラー）について

cA を各成分を c 倍することで定める

例 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$　$c = 3$

$$cA = 3A = \begin{pmatrix} 3 \times 1 & 3 \times (-2) & 3 \times 8 \\ 3 \times 2 & 3 \times 5 & 3 \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 24 \\ 6 & 15 & -3 \end{pmatrix}$$

例 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$　$c = -1$

$$cA = \begin{pmatrix} -1 \times 2 & -1 \times 1 \\ -1 \times 4 & -1 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

2×2 と同様、$1A = A$, $0A = O$（ゼロ行列）などが成りたつ（資料命題75参照）

定義（行列の積）

A : $m \times n$ 行列

B : $n \times l$ 行列 のときにのみ積ABが定義できる（$m \times l$）

ABの(i,k)成分は

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \cdots + a_{in} b_{nk}$$

とする

ABの(i,k)成分は

$(a_{i1}, \dots, a_{in})$
$(b_{1k} \dots b_{nk})$ の内積

$i=k=1$　□$=i=k=1$　□$=j$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}\ a_{12}\ \cdots\ a_{1n}} \\ \\ \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{matrix}} & \cdots \end{pmatrix}$$

ABの$(1,1)$成分＝□と▯の内積

2×2の行列の積と整合している

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ap+br & \\ & \end{pmatrix}$$

$$(AB)_{11}=\sum_{j=1}^{2} a_{1j}b_{j1}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}$$

(右のていぎ)

$$=ap+br$$

例) $A=(1\ 2\ 3)$　$\underset{m}{\underline{1}}\times\underset{n}{\underline{3}}$ 行列　$\begin{array}{ccc} (1 & 2 & 3) \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{array}$

$B=\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$　$\underset{n}{\underline{3}}\times\underset{l}{\underline{1}}$ 行列　$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{23} \end{array} \end{array}$

積ABが $\underset{m}{\underline{1}}\times\underset{l}{\underline{1}}$ 行列として定義できて

AB (1,1)成分

$$a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}$$

$$=1\times5+2\times7+3\times2=25$$

なれてくると

$$(\boxed{1\ 2\ 3})\boxed{\begin{pmatrix}5\\7\\2\end{pmatrix}} = (1\times5+2\times7+3\times2) = (25)$$

$B=\begin{pmatrix}5\\7\\2\end{pmatrix}$ $\underset{m}{3}\times\underset{l}{1}$ 行列

$A=(1\ 2\ 3)$ $\underset{n}{1}\times\underset{l}{3}$ 行列

BAが 3×3行列でていぎできて

BA

$$
\begin{array}{lll}
(1,1)\cdots & b_{11}\,a_{11} = 5\times1 = 5 \\
(1,2) & b_{11}\,a_{12} = 5\times2 = 10 \\
(1,3) & b_{11}\,a_{13} = 5\times3 = 15 \\
(2,1) & b_{21}\,a_{11} = 7\times1 = 7 \\
(2,2) & b_{21}\,a_{12} = 7\times2 = 14 \\
(2,3) & b_{21}\,a_{13} = 7\times3 = 21 \\
(3,1) & b_{31}\,a_{11} = 2\times1 = 2 \\
(3,2) & b_{31}\,a_{12} = 2\times2 = 4 \\
(3,3) & b_{31}\,a_{13} = 2\times3 = 6
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}b_{11}\\b_{21}\\b_{31}\end{array}\begin{pmatrix}5\\7\\2\end{pmatrix}
\begin{array}{c}a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\\(1\ 2\ 3)\end{array}
= \begin{pmatrix}5 & 10 & 15\\7 & 14 & 21\\2 & 4 & 6\end{pmatrix}
$$

$$AB \neq BA$$

問題81

$A=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3&2\\4&1\\0&1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}2&0&1\end{pmatrix}$ $D=\begin{pmatrix}2&3\\-1&4\end{pmatrix}$

3×1　3×2　1×3　2×2

として、A,B,C,Dのうち積が定義される全ての組みあわせを求めてその積を計算せよ

解

・AB … A $3\times\underline{1}$ B $\underline{3}\times2$　×

・BA … B $3\times\underline{2}$ A $\underline{3}\times1$　×

・AC … A $3\times\underline{1}$ C $\underline{1}\times3$ → AC 3×3行列

$$AC=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times2&2\times0&2\times1\\1\times2&1\times0&1\times1\\-1\times2&-1\times0&-1\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&2\\2&0&1\\-2&0&-1\end{pmatrix}$$

・CA … C $1\times\underline{3}$ A $\underline{3}\times1$ → CA 1×1行列

$$\begin{pmatrix}2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times2+0\times1+1\times(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\end{pmatrix}$$

・AD … A $3\times\underline{1}$ D $\underline{2}\times2$　×

・DA … D $2\times\underline{2}$ A $\underline{3}\times1$　×

BC　B 3×2　C 1×3　$\times$

CB　C 1×3　B 3×2 $\longrightarrow$ CB 1×2 行列

$$\begin{pmatrix} \boxed{2\ 0\ 1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times3+0\times4+1\times0 & 2\times2+0\times1+1\times1 \end{pmatrix}$$

$$= (6,\ 5)$$

BD　B 3×2　D 2×2 $\longrightarrow$ BD 3×2 行列

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times2+2\times(-1) & 3\times3+2\times4 \\ 4\times2+1\times(-1) & 4\times3+1\times4 \\ 0\times2+1\times(-1) & 0\times3+1\times4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 17 \\ 7 & 16 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

CD　C 1×3　D 2×2　$\times$

DC　D 2×2　C 1×3　$\times$

AA　A 3×1　A 3×1　$\times$

BB　B 3×2　B 3×2　$\times$

CC　C 1×3　C 1×3　$\times$

DD　D 2×2　D 2×2　D·D 2×2

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 18 \\ -6 & 13 \end{pmatrix}$$

2×2 のときと同様に

$A(B+C)=AB+AC$ などが成り立つ

(詳しくは資料命題82, 83参照)

$\boxed{\text{問題84}}$ 次の計算を行え

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 5 & 9 \\ 3 & -2 & 8 \\ -1 & 8 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 5 & 9 \\ 3 & -2 & 8 \\ -1 & 8 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -6 & -4 & -6 \\ 8 & -4 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -3 & -6 & 2 \\ 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$
= \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -3 & -6 & 2 \\ 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 4-9-7 & 10-18-4 & 14+6-3 \\ 0-15+28 & 0-30+16 & 0+10+12 \\ -2+0-14 & -5+0-8 & -7+0-6 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} -12 & -12 & 17 \\ 13 & -14 & 22 \\ -16 & -13 & -13 \end{pmatrix}
$$