・11/12, 11/16 休講

・11/19 演習（必ず出席すること）

$\boxed{\text{前回}}$ 対角化

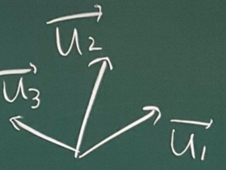
A 2×2行列, ある正則行列P

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$$

対角化でA^nが求められる

4. 一次独立・一次従属・基底

$\boxed{\text{定義}}$ ・$\underbrace{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n}_{\mathbb{R}^2\text{の元}}$ が一次独立とは



「$\underbrace{c_1}_{\text{実数}}\vec{u}_1+\cdots+c_n\vec{u}_n=\vec{0}$ ならば $c_1=\cdots=c_n=0$」となること

・$\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n$ が一次従属とは一次独立でないこと

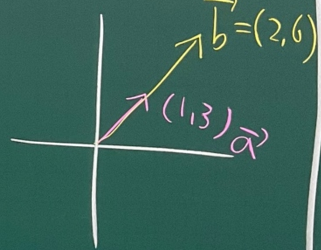
つまりある$c_1,\dots,c_n$で$c_1\vec{u}_1+\cdots+c_n\vec{u}_n=0$となるものが$c_1=\cdots=c_n=0$以外にある

・$\vec{u_1}, \vec{u_2} \in \mathbb{R}^2$ が1次独立のとき基底という

$\boxed{\text{例1}}$ $\vec{a}=(1,3), \vec{b}=(2,6)$ は1次従属

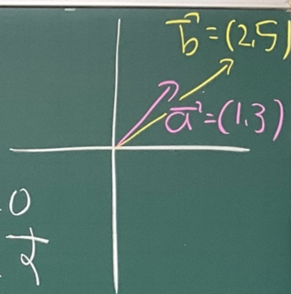
なぜなら $\underbrace{2}_{c_1}\vec{a} + \underbrace{(-1)}_{c_2}\vec{b} = (0,0) = \vec{0}$

1次従属 ≒ 並行



$\boxed{\text{例2}}$ $\vec{a}=(1,3)$ $\vec{b}=(2,5)$ は

1次独立



$\boxed{\text{証}}$ $c_1\vec{a}+c_2\vec{b}=\vec{0}$ ならば $c_1=c_2=0$ を示す

$c_1\vec{a}+c_2\vec{b}=\vec{0} \Rightarrow (c_1+2c_2, 3c_1+5c_2)=(0,0)$

$\Rightarrow c_1=c_2=0$ ○

とくに $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は基底である

① 基底 $\Rightarrow$ 1次独立（逆は成り立たない）

② 1次独立 or 1次従属

例 $\vec{a} \neq \vec{0}$ のとき $\vec{a}$ は1次独立

証 $c_1\vec{a}=\vec{0}$ ならば $c_1=0$ をいう

$\vec{a}\neq\vec{0}$ より $\vec{a}=(x,y)$ とおくと $x\neq 0$ or $y\neq 0$

$x\neq 0$ のとき $c_1\vec{a}=\vec{0} \Rightarrow (c_1x, c_1y)=(0,0) \Rightarrow c_1x=0$

$\Rightarrow c_1=0$

$y\neq 0$ も同様

定理 1. $\vec{u_1}=\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}$ $\vec{u_2}=\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$ とする

$\vec{u_1}$ と $\vec{u_2}$ が1次独立であることは

$$ad-bc=\det\begin{array}{cc}\vec{u_1} & \vec{u_2}\\ \hline \left(\begin{matrix}a\\c\end{matrix}\right. & \left.\begin{matrix}b\\d\end{matrix}\right)\end{array}\neq 0$$ と同値

2. $\vec{u_1}$ と $\vec{u_2}$ $\in\mathbb{R}^2$ が1次独立（基底）なら

どんな $\vec{v}\in\mathbb{R}^2$ に対しある $c_1, c_2\in\mathbb{R}$ があって

$$\vec{v}=c_1\vec{u_1}+c_2\vec{u_2}$$ とかける

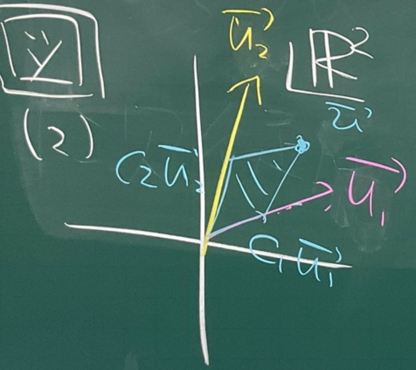
3. $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3} \in \mathbb{R}^2$ について1次従属である

とくに $n \geqq 3$ なら $\vec{u_1}, \dots, \vec{u_n} \in \mathbb{R}^2$ は

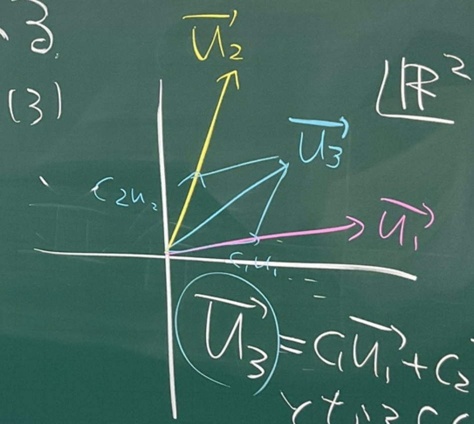
1次従属である

$\boxed{図}$

(2)



(3)



$\vec{u_3} = c_1\vec{u_1} + c_2\vec{u_2}$

となる c_1, c_2

がありそう

$\boxed{証}$ ① 1次独立

$\Longleftrightarrow$ 「$c_1\vec{u_1} + c_2\vec{u_2} = \vec{0}$ ならば $c_1 = c_2 = 0$」

$\Longleftrightarrow \begin{cases} ac_1 + bc_2 = 0 \\ cc_1 + dc_2 = 0 \end{cases}$ なら $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ なら $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Longleftarrow \quad ad - bc \neq 0$

(連立一次方程式

2.5のところ)

② $\vec{v} = \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}$ とおく. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする

$\vec{u_1}$ と $\vec{u_2}$ が1次独立 $\Longrightarrow \det A \neq 0$

$\Longrightarrow A^{-1}$ が存在.

そこで $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}$ とおくと

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac_1 + bc_2 \\ cc_1 + dc_2 \end{pmatrix}$$

$$= c_1\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = c_1\vec{u_1} + c_2\vec{u_2}$$

③ $\vec{u_1} = \vec{0}$ なら $u_1 + 0\vec{u_2} + 0\vec{u_3} = \vec{0}$ より1次従属

よって $\vec{u_i} \neq \vec{0}$ $(i = 1, 2, 3)$ としてよい

$\vec{u_1}$ と $\vec{u_2}$ が1次従属ならある $c_1\ c_2$ で

$c_1\vec{u_1} + c_2\vec{u_2} = \vec{0}$ より

$c_1\vec{u_1} + c_2\vec{u_2} + 0\cdot\vec{u_3} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{u_1}, \vec{u_2}\, \vec{u_3}$ 1次従属

$\vec{u_1}, \vec{u_2}$ 1次独立なら②より $\vec{u_3} = c_1\vec{u_1} + c_2\vec{u_2}$

なる $c_1\ c_2$ がある

$\Longrightarrow c_1\vec{u_1} + c_2\vec{u_2} + (-1)\vec{u_3} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{u_1}\, \vec{u_2}\, \vec{u_3}$ は1次従属

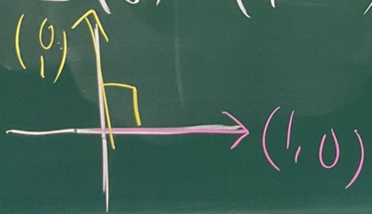
§4.2 正規直交基底

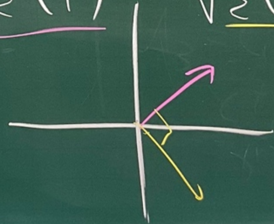
$\boxed{\text{定義}}$ $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in \mathbb{R}^2$ について

$\|\vec{u}_1\| = \|\vec{u}_2\| = 1$　$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$ のとき

正規直交基底という

$\boxed{\text{例}}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,　$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$　$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$





$\boxed{\text{命題}}$ $\vec{u}_1\ \vec{u}_2 \in \mathbb{R}^2$ を正規直交基底

① $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ は基底(1次独立)である

② $\vec{x} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2$ なら

$\|\vec{x}\| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ となる

$\boxed{\text{証}}$ ①「$c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 = \vec{0}$ なら $c_1 = c_2 = 0$」を示す

$c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 = \vec{0} \underset{(\vec{u}_1\text{との内積})}{\Longrightarrow} (c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2)\cdot\vec{u}_1 = 0$

$\Longrightarrow c_1 = 0$　　$c_2 = 0$ も同じ

② $\|\vec{v}\| = \sqrt{(\vec{v}\cdot\vec{v})}$

$$= \sqrt{(c_1\vec{u_1}+c_2\vec{u_2})\cdot(c_1\vec{u_1}+c_2\vec{u_2})}$$

$$= \left\{c_1^2(\underbrace{\vec{u_1}\cdot\vec{u_1}}_{1}) + c_1c_2(\underbrace{\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}}_{0}) + c_2c_1(\underbrace{\vec{u_2}\cdot\vec{u_1}}_{0}) + c_2^2(\underbrace{\vec{u_2}\cdot\vec{u_2}}_{1})\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{c_1^2+c_2^2}$$

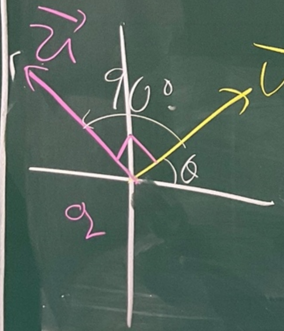
定理 $\mathbb{R}^2$の正規直交基底 $\vec{u},\vec{v}$は
（うまくいれかえると）

$\vec{u}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$の形となる

証 $\vec{u}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$とすると$\|\vec{u}\|=1$より

$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}$とかける

$\vec{u}\cdot\vec{v}=0$より(うまくいれかえて)



$\vec{v}$は$\vec{u}$の左側にあるとして

$\vec{v}$は$\vec{u}$を90度回転したものより

$\vec{v}=\begin{pmatrix}\cos(90°+\theta)\\\sin(90°+\theta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sin\theta\\\cos\theta\end{pmatrix}$より.

定理 $A=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\end{pmatrix}$とする

${}^tAA=E_2$

${}^tA=\begin{pmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{pmatrix}$

Aが直交行列であることは

$\vec{u}_1=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$と$\vec{u}_2=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$が正規直交基底

であることと同値

とくに2×2の直交行列は

$\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$ or $\begin{pmatrix}-\sin\theta&\cos\theta\\\cos\theta&\sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

しかない

$\boxed{証}$ $${}^tAA = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1x_2+y_1y_2 \\ x_2x_1+y_2y_1 & x_2^2+y_2^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \|v_1\|^2 & \vec{v_1}\cdot\vec{v_2} \\ \vec{v_2}\cdot\vec{v_1} & \|\vec{v_2}\|^2 \end{pmatrix}$$

よって ${}^tAA = E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Longleftrightarrow \|\vec{v_1}\| = \|\vec{v_2}\| = 1,\ \vec{v_1}\cdot\vec{v_2} = 0$$

$$O(n) = \{A\ n\times n\text{行列} \mid {}^tAA = E_n\}$$

$\cup$ "正規直交基底" = 直交行列

$$SO(n) = \left\{A : n\times n\text{行列} \;\middle|\; \begin{array}{l} {}^tAA = E_n \\ \det A = 1 \end{array}\right\}$$

$$O(2) = \left\{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ or } \begin{pmatrix} -\sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}\right\}$$

$\cup$

$$SO(2) = \left\{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\right\}$$