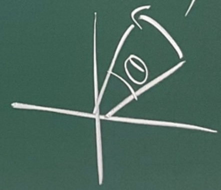
前回 1次変換 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$.

$$f_A: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\longmapsto \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+by\\cx+dy\end{pmatrix}$$

代表的なやつ $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

f_A θ反時計回転



3 対角化

定義 2×2行列Aについて

ある正則行列Pがあって

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$$

ラムダ（ギリシャ文字）

のときAは対角化可能という

Q. 対角化はなぜする？ ⟶ A^n が求められる

$\boxed{\text{例1}}$ $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$, $P=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$, $P^{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$

$$P^{-1}AP=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&1\\3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2&0\\0&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&3\end{pmatrix}=B$$ とおく.

$$B^n=\begin{pmatrix}-1&0\\0&3\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}(-1)^n&0\\0&3^n\end{pmatrix}$$

$$B^n=\underbrace{P^{-1}A\underbrace{PP^{-1}}_{E_2}A\underbrace{PP^{-1}}_{E_2}AP\cdots P^{-1}A\underbrace{PP^{-1}}AP}_{n\text{コ}}$$

$$=P^{-1}\underbrace{A\cdot\cdots\cdots\cdot A}_{n\text{コ}}P$$

$$=P^{-1}A^nP$$

$$\therefore A^n=P\cdot\underbrace{(P^{-1}A^nP)}_{=B}P^{-1}=PB^nP^{-1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}(-1)^n&0\\0&3^n\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3^n+(-1)^n&3^n-(-1)^n\\3^n-(-1)^n&3^n+(-1)^n\end{pmatrix}$$

($n=1,2,\dots$ であってる)

Q. 対角化はどうやってする？→次の方法である

$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ とする

・手順1 $\det(A-tE_2)=\det\begin{pmatrix}a-t&b\\c&d-t\end{pmatrix}=0$.

の解を求める。

$(a-t)(d-t)-bc=0$ の解

解を λ_1,λ_2 とする

・手順2 $A\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ となる

$\boxed{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\text{以外}}$ のベクトルを1つとる

[つまり $\begin{pmatrix}ax_1+by_1\\cx_1+dy_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1x_1\\\lambda_1y_1\end{pmatrix}$ となる $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ を1つとる $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ 以外で

・λ_1,λ_2 固有値, $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ を λ_1 の固有ベクトル.

同様に $A\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=\lambda_2\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ なる $\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ もとる.

手順3 $P=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\end{pmatrix}$ とおくと

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$$ となる

$\boxed{\text{例}}$ $A=\begin{pmatrix}8&-10\\5&-7\end{pmatrix}$ を対角化する

$\boxed{\text{手順1}}$ $\det\begin{pmatrix}8-t&-10\\5&-7-t\end{pmatrix}=0$ なる t を求める

つまり $(8-t)\cdot(-7-t)-(-10)\cdot 5=0$

$\therefore t=3,-2$ $(\lambda_1=3, \lambda_2=-2)$

手順2 $A\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ なる $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ を求める

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}8x_1-10y_1\\5x_1-7y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x_1\\3y_1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ 以外で

$\Rightarrow \begin{pmatrix}5x_1-10y_1\\5x_1-10y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}}$ とる

自由にとってよい $\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\pi\\3\pi\end{pmatrix}$ でもOK

同様に λ_2 についても

$\begin{pmatrix}8x_2-10y_2\\5x_2-7y_2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=\lambda_2\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2x_2\\-2y_2\end{pmatrix}$

なる $\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ を1つとる $\boxed{\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}$

$\boxed{\text{手順3}}$ $P=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$ とすると

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\0&-2\end{pmatrix}$ となる.

Q. なぜこれでうまくいくのか？

$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ は $\boxed{A\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 x_1\\\lambda_1 y_1\end{pmatrix}}$ となるので

$\begin{pmatrix}ax_1+by_1\\cx_1+dy_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 x_1\\\lambda_1 y_1\end{pmatrix}$

$$AP=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\underline{ax_1+by_1}&ax_2+by_2\\\underline{cx_1+dy_1}&cx_2+dy_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda_1 x_1&\lambda_2 x_2\\\lambda_1 y_1&\lambda_2 y_2\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\end{pmatrix}}_{P}\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$$

$\therefore\ AP=P\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$

左から P^{-1} かけて $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$ //

補足 $\lambda_1\neq\lambda_2$ のとき $\Longrightarrow$ 対角化できる

$\because$ (理由 $\begin{pmatrix}(a-\lambda_1)x_1+by_1\\cx_1+(d-\lambda_1)y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ の解があるから)

$\lambda_1=\lambda_2$ のとき <u>できない場合がある</u>

(どうがんばっても $\begin{pmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\end{pmatrix}$ を正則にできない)

定理 A 2×2行列が対角化可能であることは
①か②のどちらかが成りたつことと同じ

① $A=\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

② 固有値 λ_1 と λ_2 が異なる値.

(みなさんは対角化できると思って大丈夫です)

補足2 固有値は2次方程式の解なので
複素数になることはある

3.2 転置行列, 直交行列, 対称行列.

定義 ・$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について

かくくき ひっくり返す

$\boxed{{}^tA=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}}$ をAの転置という.

・${}^tA=A$ のときAを対称行列という

・${}^tA\cdot A=A\,{}^tA=E_2$ なるAを直交行列
という

例 $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ 直交行列、対称。

$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ 直交行列。

対称行列 $\Longleftrightarrow$ $A=\begin{pmatrix}a&b\\b&d\end{pmatrix}$ の形。

定理 Aが対称行列なら
直交行列Pがあって
${}^tPAP=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$ とできる

補足 Pが直交行列 $\Longleftrightarrow {}^tP\,P = P\,{}^tP = E_2$

$\Longleftrightarrow {}^tP = P^{-1}$

実際 $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}\cos(-\theta) & -\sin(-\theta)\\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta)\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

例 $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$ ${}^tA=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}=A$ 対称。

$P=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(-\frac{\pi}{4}) & -\sin(-\frac{\pi}{4})\\ \sin(-\frac{\pi}{4}) & \cos(-\frac{\pi}{4})\end{pmatrix}$ 直交

${}^tPAP=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0\\0&3\end{pmatrix}$

$\boxed{\text{証}}$ (1) A対称 ⇒ 固有値は実数

なぜなら A対称 ⇔ $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ の形

$\det\begin{pmatrix} a-t & b \\ b & d-t \end{pmatrix}=0$ の解は

$$t^2-(a+d)t+(ad-b^2)=0 \text{ の解}$$

判別式 $(a+d)^2-4(ad-b^2)$

$$=(a-d)^2+4b^2 \geq 0 \text{ より}$$

よって固有値 λ_1 とし固有ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ とする

$\sqrt{x_1^2+y_1^2}=1$ としてよい

$v_1=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix} -y_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$ とおくと （来週 （v_1 と v_2 が正規直交基底になるから））

$A\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} -y_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$ なる a, b がある

$$A\begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 & ax_1-by_1 \\ \lambda y_1 & ay_1+bx_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

$P=\begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix} \lambda_1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ とする

わかってること $P^{-1}AP = Q = \begin{pmatrix}\lambda_1 & a \\ 0 & b\end{pmatrix}$

$\boxed{\text{主張}}$ ① $P^{-1} = {}^tP$

② $a = 0$

$\Longrightarrow {}^tPAP = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 \\ 0 & b\end{pmatrix}$ 対角化

$\boxed{\text{証①}}$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix}x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{x_1^2+y_1^2}\begin{pmatrix}x_1 & y_1 \\ -y_1 & x_1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}x_1 & y_1 \\ -y_1 & x_1\end{pmatrix} = {}^t\begin{pmatrix}x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1\end{pmatrix} = {}^tP$$

② ${}^tP\,AP = Q = \begin{pmatrix}\lambda_1 & a \\ 0 & b\end{pmatrix}$

実は ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ となるので（計算により）

$${}^t({}^tP\,AP) = {}^tQ = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 \\ a & b\end{pmatrix}$$

$$\parallel$$

$${}^tP\,{}^tA\,{}^{tt}P = {}^tPAP = Q = \begin{pmatrix}\lambda_1 & a \\ 0 & b\end{pmatrix}$$

$\boxed{{}^tA = A,\ {}^{tt}P = P}$

$a = 0$ //