前回

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}$$

Aが正則 $\Longleftrightarrow A^{-1}A = AA^{-1} = E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Longleftrightarrow \det A = ad-bc \neq 0$

(Aの逆行列をA^{-1}という)

2.5 連立一次方程式への応用

定理 $\begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=r \end{cases}$ に関して

$ad-bc\neq 0$ ならば解をもち、$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると

解は $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}$ となる

$$= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}$$ となる

$\left(x = \dfrac{dp-br}{ad-bc},\quad y = \dfrac{-cp+ar}{ad-bc} \right)$

例 ☆ $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ とすると

$$A^{-1} = \frac{1}{2\times 2 - 1\times 1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

☆の解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\times 5 - 1\times 3 \\ -1\times 5 + 2\times 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow \begin{cases} x = \frac{7}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$

証 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = r \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}$$

(行列にかきかえ)

$$\iff A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}$$

左からA^{-1}をかける

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}$$

では $ad-bc=0$ のときは?

$\boxed{例}$ $\begin{cases} x+2y=2 \\ 2x+4y=4 \end{cases}$ の解は

$\Rightarrow \begin{cases} x+2y=2 \\ 0=0 \end{cases}$　$\boxed{解}$ $x=2-2y$ (無限個の解)

(下に上×2を引く)

(もっと複雑になっても同じようになる(授業の後半))

$\boxed{例2}$ $\begin{cases} x+2y=2 \\ 2x+4y=5 \end{cases}$ の解は?

もし存在したとすると、"下から上の2倍をひいて"

$\begin{cases} x+2y=2 \\ 0=1 \end{cases}$ 矛盾 (解は存在しない

つまり $\begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=r \end{cases}$ の解は $\begin{cases} \text{一通り存在} & (ad-bc\neq 0 \text{ のとき}) \\ \text{無限にある} & \\ \text{存在しない} & (ad-bc=0 \text{ のとき}) \end{cases}$

2.6 一次変換

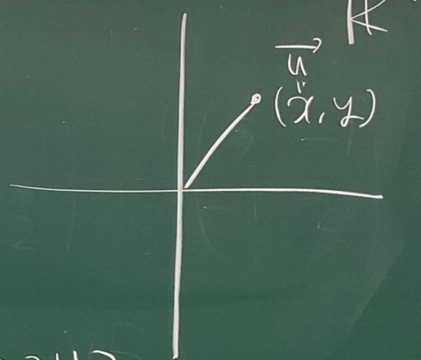
ベクトルの復習

$\mathbb{R}^2$で平面を表わし

その点を $\vec{u}=(x,y)$とかく

$\vec{u}=(a,b)$, $\vec{v}=(c,d)$について

和、差 $\vec{u}\pm\vec{v}=(a\pm c,\ b\pm d)$



スカラー倍 $\alpha\vec{u}=(\alpha a,\ \alpha b)$

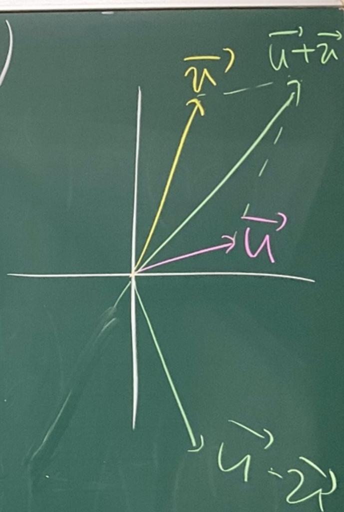
(α:実数)

内積 $\vec{u}\cdot\vec{v}=ac+bd$

ノルム(長さ) $\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$

$=\sqrt{a^2+b^2}$

ゼロベクトル $\vec{0}=(0,0)$



定義 (一次変換)

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について

$$f_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

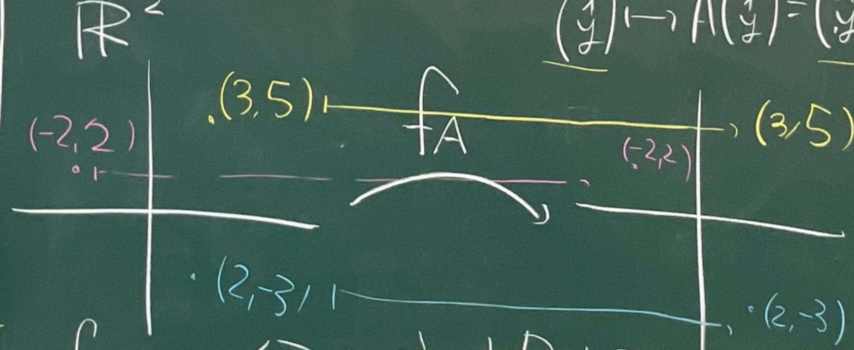
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

という変換を一次変換という

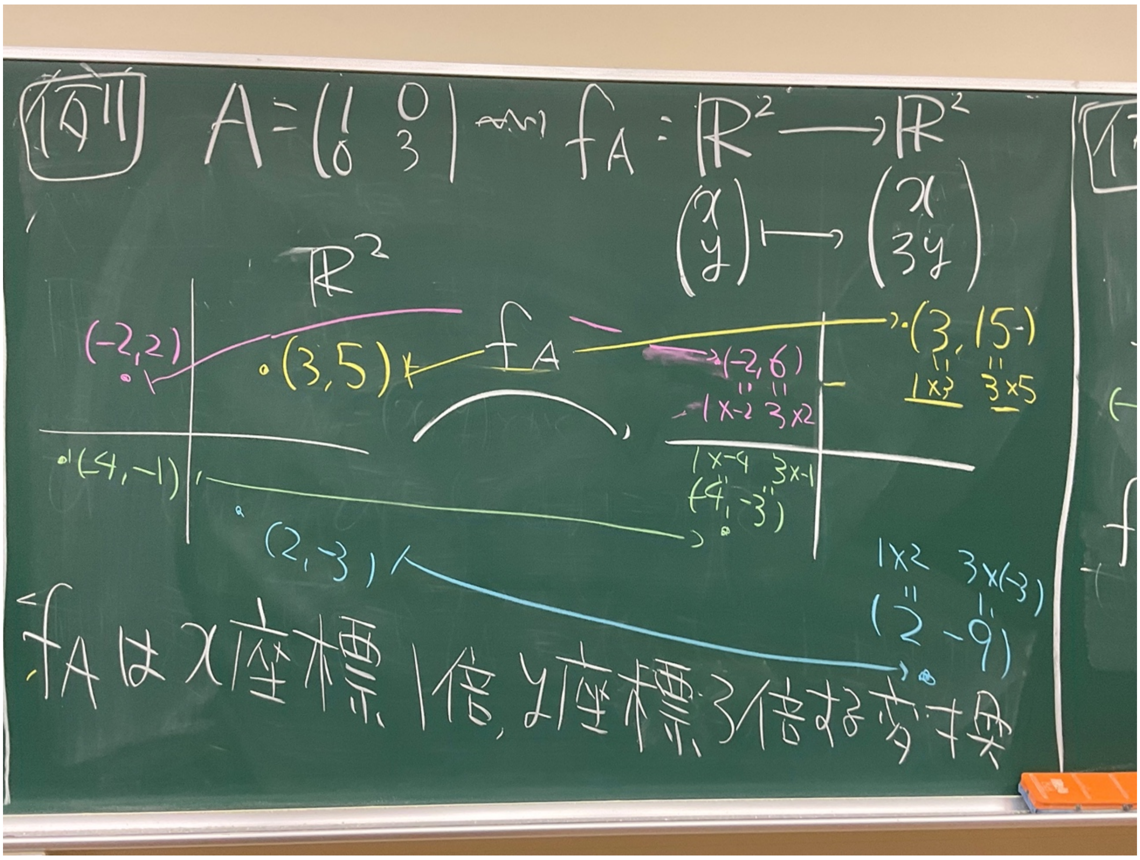
例 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow f_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

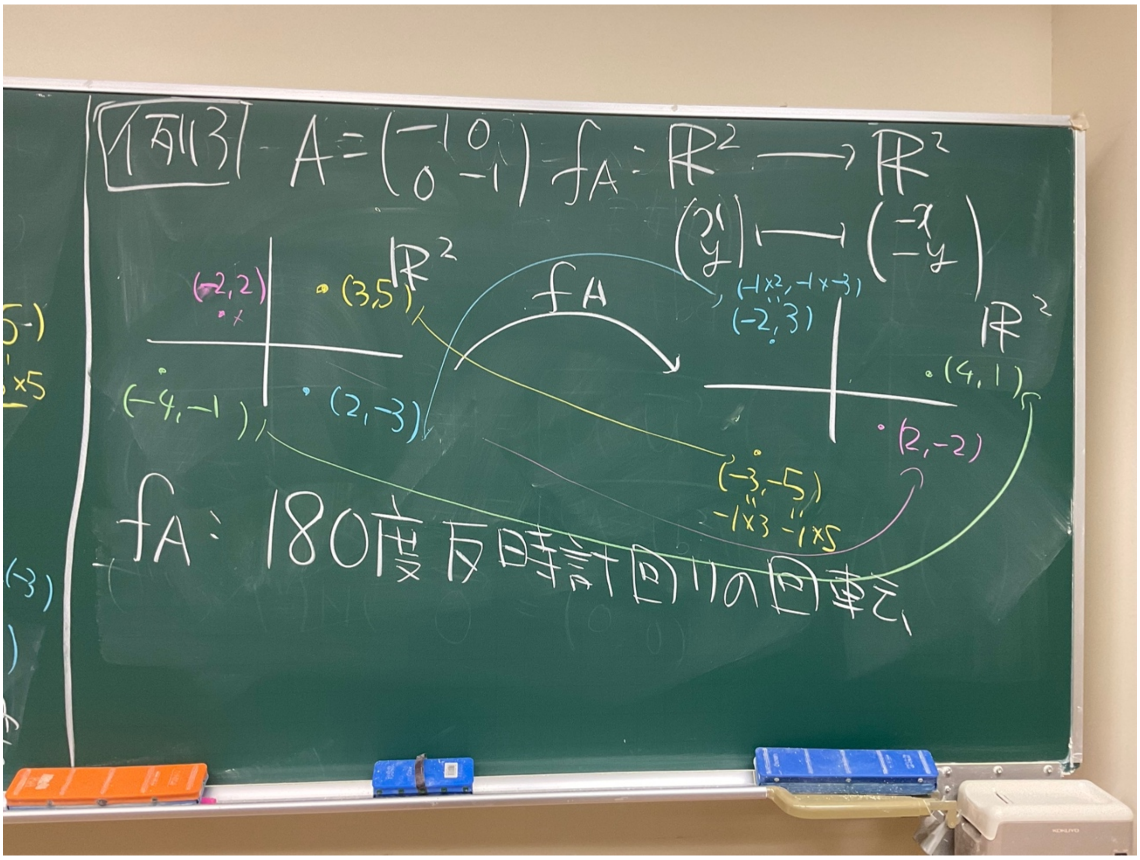
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^2$



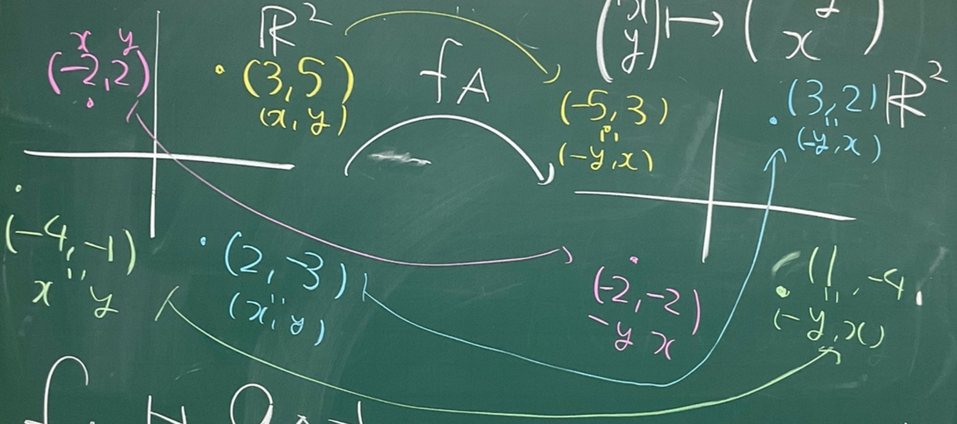
f_Aは何も変換していない


例1
A = (1 0 / 0 3) ⇝ fA : R² → R²
(x, y) ↦ (x, 3y)
R²
(−2, 2)
(3, 5)
fA
(−2, 6)
−1×−2 3×2
(3, 15)
1×3 3×5
(−4, −1)
1×−4 3×−1
(−4, −3)
(2, −3)
1×2 3×(−3)
(2, −9)
fAはx座標1倍, y座標3倍する変換


例3
A = (−1 0 / 0 −1) fA : R² → R²
(x, y) ↦ (−x, −y)
R²
(−2, 2)
(3, 5)
fA
(−1×2, −1×−3)
(−2, 3)
R²
(4, 1)
(−4, −1)
(2, −3)
(2, −2)
(−3, −5)
−1×3 −1×5
fA: 180度反時計回りの回転

例 $A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ について $f_A:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}$$



f_A は90度反時計回転な変換

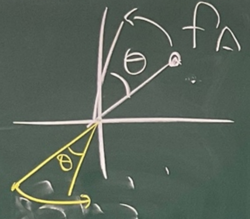
定理 $A=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\ \sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$ について

$f_A:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\longmapsto A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta\, x-\sin\theta\, y\\ \sin\theta\, x+\cos\theta\, y\end{pmatrix}$$

という変換は

θ 反時計回り回転な変換となる.



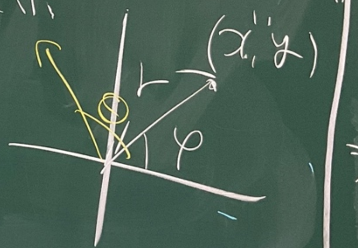
実際 $\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos180^\circ&-\sin180^\circ\\\sin180^\circ&\cos180^\circ\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos90^\circ&-\sin90^\circ\\\sin90^\circ&\cos90^\circ\end{pmatrix}$

証 (x,y)を極座標表示

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\cos\varphi\\r\sin\varphi\end{pmatrix}$とすると

(r 長さ
φ x軸からみた角度)



$$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta\, x-\sin\theta\, y\\\sin\theta\, x+\cos\theta\, y\end{pmatrix}$$

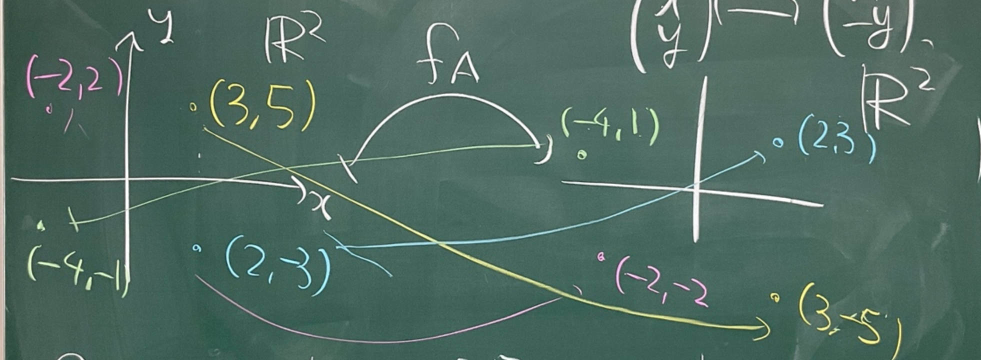
$$=\begin{pmatrix}r\cos\theta\cos\varphi-r\sin\theta\sin\varphi\\r\sin\theta\cos\varphi+r\cos\theta\sin\varphi\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}r\cos(\theta+\varphi)\\r\sin(\theta+\varphi)\end{pmatrix}$$

つまり $\begin{pmatrix}r\cos\varphi\\r\sin\varphi\end{pmatrix}\xmapsto{f_A}\begin{pmatrix}r\cos(\theta+\varphi)\\r\sin(\theta+\varphi)\end{pmatrix}$ より f_Aはθ度回転変換

$\boxed{例1}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow f_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

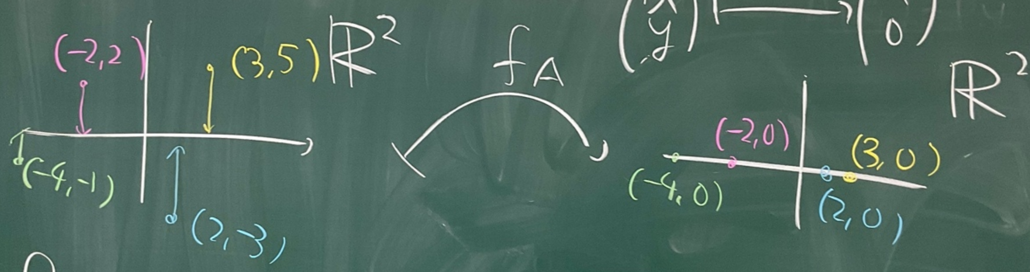
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}.$$



f_A は x 軸に関して反転する変換.

$\boxed{例}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $f_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$



f_A: x 軸への射影 //

$\boxed{\text{定理}}$ A, B 2×2行列

$f_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$　　$f_B : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ とすると

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \longmapsto A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$　　$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \longmapsto B\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$\underline{f_B \circ f_A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = f_B\left(f_A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)}$: $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f_A} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f_B} \mathbb{R}^2$

は $BA\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ となる

f_Aやって
その後
f_Bする変換

特にAが正則なら

$f_{A^{-1}}$ が f_A の逆変換となる

つまり $f_{A^{-1}} \circ f_A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$　　$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f_A} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f_{A^{-1}}} \mathbb{R}^2$

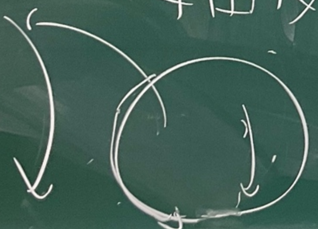
$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$f_A \circ f_{A^{-1}}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$\boxed{\text{例}}$ 90度反時計回転して
その後x軸に関して反転させる変換
は $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}$ であたえられる。

$\boxed{\text{証}}$ 90度回転 $\mapsto A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ で表せれる

x軸反転 $\mapsto B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ：

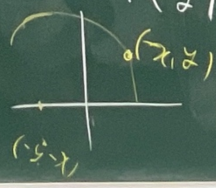


$f_B \circ f_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f_B\left(f_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$ $\quad \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f_A} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f_B} \mathbb{R}^2$

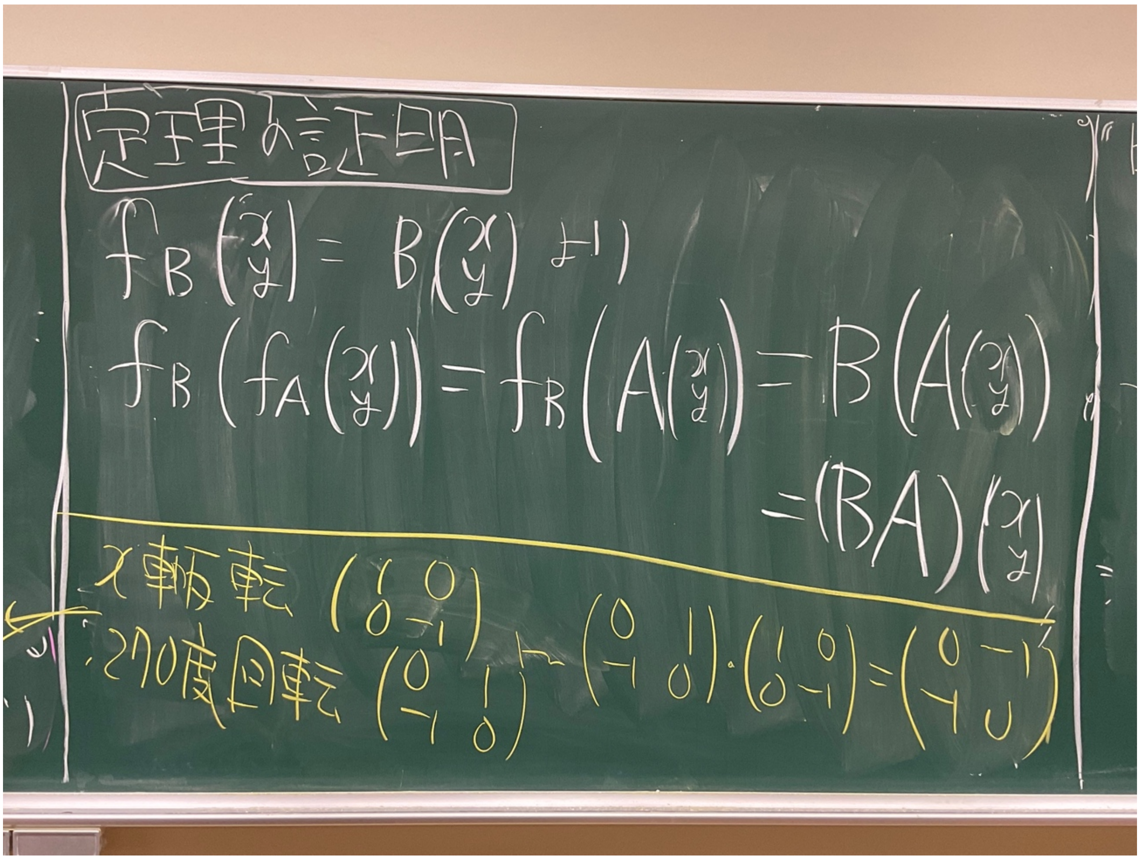
は $BA\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ であたえられる。

$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ より

$f_B \circ f_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}$ となる



(実は、x軸反転して270度回転と同じ)


定理の証明
$f_B\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = B\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ より
$f_B\left(f_A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = f_B\left(A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = B\left(A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)$
$= (BA)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$
x軸反転 $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$
270度回転 $\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}$ ⊢ $\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{pmatrix}$