前回 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}$

$$AB=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ap+br \\ cp+dr \end{pmatrix}$$

□ … (a, b)と(p, r)の内積

□ … (c, d)と(p, r)の内積

2×2行列どうしのかけ算

定義 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とするとき

2×2行列 AB を

$$AB=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}$$

□ … 2×1行列で $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}$ になる

□ … 2×1行列で $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q \\ s \end{pmatrix}$ になる

もしくは

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{ap+br} & \underline{aq+bs} \\ \underline{cp+dr} & \underline{cq+ds} \end{pmatrix}$$

— …… (a, b) と (p, r) の内積

— …… (a, b) と (q, s) の内積

— …… (c, d) と (p, r) の内積

— …… (c, d) と (q, s) の内積

$\boxed{例}$ $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

一般に
$AB \neq BA$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \underline{2\times5+3\times2} & \underline{2\times2+3\times3} \\ \underline{1\times5+4\times2} & \underline{1\times2+4\times3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 13 \\ 13 & 14 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \underline{5\times2+2\times1} & \underline{5\times3+2\times4} \\ \underline{2\times2+3\times1} & \underline{2\times3+3\times4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 23 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}$$

例 $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ とする

$$AB=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2\times1+1\times0 & 2\times0+1\times1\\1\times1+2\times0 & 1\times0+2\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$$

一般に (E_2 単位行列)

$E_2A=AE_2=A$

$$BA=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\times2+0\times1 & 1\times1+0\times2\\0\times2+1\times1 & 0\times1+1\times2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$$

例 $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

$AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=BA$

一般に (O はゼロ行列)

$AO=OA=O$

資料にのってるような法則(命題22, 23)は成りたつ

(例 $A(B+C)=AB+AC$, $A(BC)=(AB)C$

(つ) $AB\neq BA$ に注意して普通に計算できる)

$\boxed{\text{定義}}$ A: 2×2行列, m: 1以上の整数

$$A^m = \underbrace{((A\cdot A)A)\cdots A}_{m\text{コかける}}$$

$\boxed{\text{例}}$ $A = \begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5&4\\4&5\end{pmatrix}$$

$$A^3 = (A^2)A = \begin{pmatrix}5&4\\4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}14&13\\13&14\end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3A = \begin{pmatrix}14&13\\13&14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}41&40\\40&41\end{pmatrix}$$

A^m は?

授業前半でこれをもとめるようになる(対角化)

$\boxed{例}$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$$

$\boxed{命題}$ $A^m = \begin{pmatrix} 2^m & 0 \\ 0 & 3^m \end{pmatrix}$

$\boxed{証}$ "帰納法"

$m=1$ $A^1 = \begin{pmatrix} 2^1 & 0 \\ 0 & 3^1 \end{pmatrix}$ よりok

$m-1$ のとき成り立つとしたとき m で成り立つことを示す

$$A^m = A^{m-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 2^{m-1} & 0 \\ 0 & 3^{m-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

"帰納法の仮定"

$$= \begin{pmatrix} 2^{m-1} \cdot 2 & 0 \\ 0 & 3^{m-1} \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^m & 0 \\ 0 & 3^m \end{pmatrix}$$

ok!

一般に

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} a^m & 0 \\ 0 & b^m \end{pmatrix} //$$

2.4 正則行列と逆行列

$\boxed{\text{行列のわり算を定義する}}$

↑ いつでもできない。

というのも $A \neq O$, $B \neq O$ だが $AB = O$ なる例がある

$\boxed{\text{例}}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$15 \div 4 = 15 \times \frac{1}{4}$

$\frac{1}{4}$ は 4の逆数

わり算 = 逆数のかけ算

逆数 → 行列版 → 逆行列

(2×2行列)

$\boxed{\text{定義}}$ A 2次正方行列として、あるBがあって

$$AB = BA = E_2 \quad \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{のこと}\right)$$

となるとき BをAの逆行列といい A^{-1} とかく

Aが逆行列をもつとき Aを正則行列という

$\boxed{例}$ $A=\begin{pmatrix}1&-5\\0&1\end{pmatrix}$ の逆行列は $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&5\\0&1\end{pmatrix}$

なぜなら $\begin{pmatrix}1&-5\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&5\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1&5\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-5\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$\boxed{例}$ A 正則（逆行列をもつ）のとき

$AB=O$ なら $B=O$

証 A が正則 $\Longrightarrow$ 逆行列 A^{-1} をもつ $(A^{-1}A=AA^{-1}=E_2)$

よって $AB=O$ より 左から A^{-1} をかけて

$\underbrace{(A^{-1}A)}_{E_2}B=A^{-1}(AB)=A^{-1}O=O$

よって $B=O$

特に $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ や $\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ は正則ではない

($\because$ $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ が正則なら $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=O$ から $\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ となり矛盾)

定理 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ について $ad-bc\neq 0$ なら

Aは正則であり、

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$$ となる

逆にAが正則(逆行列をもつ)なら

$ad-bc\neq 0$ である

定義 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ について

$\boxed{\det A=ad-bc}$ をAの行列式という

例

$\det\begin{pmatrix}1&-5\\0&1\end{pmatrix}=1\times1-(-5)\times0=1\neq0$ 正則

$\det\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=1\times0+0\times0=0$ 正則でない

$\det\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}=1\times0-0\times1=0$ 正則でない

$\det\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=0\times0-0\times0=0$

（定理の証明）

$ad-bc\neq 0$ とする。$B=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ として

$AB=BA=E_2$ を示す。

$$AB=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

（a,b 実数なら $ab=ba$）

$$=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & \underbrace{-ab+ba} \\ cd-dc & -cb+da \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$BA=E_2$ も同様

逆に A が正則のとき $ad-bc\neq 0$ を示す

$A^{-1}=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ とおくと $A^{-1}A=AA^{-1}=E_2$ より

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ax+bz=1, & ay+bw=0 \\ cx+dz=0 & cy+dw=1 \end{cases} \cdots (☆)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} adx+bdz=d & ady+bdw=0 \\ bcx+bdz=0 & bcy+bdw=b \end{cases}$$

よって(上の式)−(下の式)をして

$\Rightarrow (ad-bc)x = d,\ (ad-bc)y = b$

もし $ad-bc=0$ なら $d=b=0$

よって☆は
$$\begin{cases} ax=1 & ay=0 \\ cx=0 & cy=1 \end{cases}$$

これは成りたつことないので矛盾

($cx=0$ より $x=0$ または $c=0$, $x=0$ は $ax=1$ に矛盾, $c=0$ は $cy=1$ に矛盾)

$\boxed{\text{定理}}$ A, B 2×2 行列とする

$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad-bc$

① $\det(AB) = (\det A)\times(\det B) = \det(BA)$

② $\det A \neq 0$ は A が正則と同値

($\det A\neq 0 \Rightarrow$ A正則, A正則 $\Rightarrow \det A \neq 0$)

③ $AB=E_2$ なら

A は正則で $B=A^{-1}$

証 ②は前の定理から
①をみとめて③を示す。

$AB = E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ より

$$\det(AB) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\det(AB) = (\det A) \times (\det B)$$

よって $\det A \neq 0$

よって②より Aは正則

Aは正則より逆行列 A^{-1} がある $(AA^{-1} = A^{-1}A = E_2)$

$AB = E_2$ より 左から A^{-1} かけて

$$A^{-1}(AB) = A^{-1}E_2 = A^{-1}$$

$$(A^{-1}A)B = E_2 B = B$$

$(CE_2 = C$
E_2 単位行列$)$

$A^{-1}A = E_2$

$\therefore$ $B = A^{-1}$

①はガチ計算で示せる

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}$$

$$\det(AB)=(ap+br)(cq+ds)-(aq+bs)(cp+dr)$$

$$=\cdots\cdots=(ad-bc)(ps-qr)=(\det A)(\det B)$$

定

①

②

③