演習問題 2024 年 11 月 19 日 (火) の講評

- 問題 1-3

　ほぼ全員できてました. これはできるようになっておきましょう.

- 問題 4

　対角化において, 固有値 λ_1 に対する固有ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 以外なら何を取っても良いです. 例えば (1) において固有値 $\lambda_1 = 3$ とした場合, $A\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ となる固有値 $\lambda_1 = 3$ の固有ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ については, $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ を取っても良いし $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ を取っても良いです.

- 問題 5

　「45 度反時計回りに回転する変換」に対応する行列を A とし, 「x 軸に関しての反転を行う変換」に対応する行列を B とするとき, 「45 度反時計回りに回転して, x 軸に関しての反転を行う」変換に対応する行列は BA となります.

　これは $\mathbb{R}^2$ の一次変換を

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とすると. f が「45 度反時計回りに回転する変換」であり, g が「x 軸に関しての反転を行う変換」となります. そして $g \circ f$ は「45 度反時計回りに回転して, x 軸に関しての反転を行う変換」になります. 資料の定理から

$$g \circ f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := g\left(f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = BA\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となるので, 「45 度反時計回りに回転して, x 軸に関しての反転を行う変換」に対応する行列は BA となります.

- 問題 6

　要は次の定理を組み合わせれば解けます.

1. $\det(AB) = (\det(A))(\det(B)) = \det(BA)$.
2. $\det(A) \neq 0$ であることは A が正則であることと同値.
3. $AB = E_2$ ならば, A は正則で B は A の逆行列である.

- 問題 7

　これは阪大の過去問の問題と全く一緒です. しかし (3) に間違いが多くありました. $\boldsymbol{p} = c\boldsymbol{u} + d\boldsymbol{v}$ と表せられることから,

$$||\boldsymbol{p} - (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})|| \leqq \frac{1}{3} \quad \text{かつ} \quad \boldsymbol{p} \cdot (2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \leqq \frac{1}{3}$$

は $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ が正規直交基底であることより

$$\sqrt{\left(c - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(d - \frac{1}{3}\right)^2} \leqq \frac{1}{3} \quad \text{かつ} \quad c \leqq \frac{1}{3}$$

と同値です. あとは図を書けばわかります. ($c = d = 0$ になることはないです.)

1 (1) 3×4 行列

(2) 0

(3) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

2 (1) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 & -12 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -4 & -14 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^3 + 3\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 125 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 140 & 3 \\ 3 & 14 \end{pmatrix}$

$\boxed{3}$ (1) $\det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 3\times 4 - 2\times 1 = 10$

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{2\times 3-(-5)\times 1}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

$= \dfrac{1}{11}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 100 & 99 \\ 99 & 100 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{100^2-99^2}\begin{pmatrix} 100 & -99 \\ -99 & 100 \end{pmatrix}$

$= \dfrac{1}{199}\begin{pmatrix} 100 & -99 \\ -99 & 100 \end{pmatrix}$

④ 手順通りやる

(1) $\det(A - tE_2) = \det\begin{pmatrix} 4-t & 2 \\ 0 & 3-t \end{pmatrix} = 0$ をとく

$(4-t)(3-t) - 2\times 0 = 0$

$\Rightarrow \quad (4-t)(3-t) = 0$

$\Rightarrow \quad t = 3, 4$

② $Au = 3u$ なる $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ を1つもとめる

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 \\ 3y_1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$ ⇐ (ここは $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ などでもよい $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 以外ならよい)

$Au = 4u$ なる $u = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ を1つもとめる

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_2 \\ 4y_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

③ $P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ となる

また $(P^{-1}AP)^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}$ より

$$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$$

$$A^n = P \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix} P^{-1},$$

$$P^{-1} = \frac{1}{2\times 0 - (-1)\times 1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

より

$$A^n = P \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 3^n & 4^n \\ -3^n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4^n & 2(4^n-3^n) \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

(2) ① $\det(B - tE_2) = \det\begin{pmatrix} 13-t & -30 \\ 5 & -12-t \end{pmatrix}$ をとく。

$\Rightarrow (13-t)(-12-t) - (-30)\cdot 5 = 0$

$\Rightarrow -156 - t + t^2 + 150 = 0$

$\Rightarrow t^2 - t - 6 = 0$

$\Rightarrow (t-3)(t+2) = 0$

$t = 3, -2$

② $Bx = 3x$ をとく $\left(x = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right)$

$$\begin{pmatrix} 13 & -30 \\ 5 & -12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$ より

$$\begin{pmatrix} 10 & -30 \\ 5 & -15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$Bx = -2x$ をとくと

$$\begin{pmatrix} 13 & -30 \\ 5 & -12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$ より

$$\begin{pmatrix} 15 & -30 \\ 5 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

③ $P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$ //

また $(P^{-1}AP)^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$

$$P^{-1} = \frac{1}{3-2}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$ より

$$A^n = P \cdot (P^{-1}AP)^n \cdot P^{-1}$$

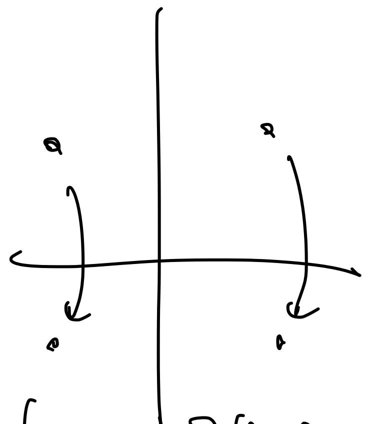
$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3^{n+1} & 2 \cdot (-2)^n \\ 3^n & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3^{n+1} + (-2)^{n+1} & -2 \cdot 3^{n+1} + 6(-2)^n \\ 3^n - (-2)^n & -2 \cdot 3^n + 3 \cdot (-2)^n \end{pmatrix}$$

$\boxed{5}$ (1) $\begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$



(3) 45度反回転し、x軸に関して反転

$\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

x軸反転し 315度反回転

$\iff \begin{pmatrix} \cos 315^\circ & -\sin 315^\circ \\ \sin 315^\circ & \cos 315^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

2つとも一次変換に対応する行列がひとしいので同じへんかんである

$\boxed{6}$ ・$\det A \neq 0 \Leftrightarrow A$ 正則

・$\det(AB) = (\det A)(\det B)$

をもちいる

① AとBが正則

$\Rightarrow \det A \neq 0$ かつ $\det B \neq 0$

$\Rightarrow (\det A)(\det B) \neq 0$

$\Rightarrow \det(AB) \neq 0 \Rightarrow AB$正則

② AB正則

$\Rightarrow \det(AB) \neq 0$

$\Rightarrow (\det A)(\det B) \neq 0$

$\Rightarrow (\det A) \neq 0$ かつ $(\det B) \neq 0$

$\Rightarrow A$ も B も正則

6 (別解)

(1) A と B が正則 ⟹ 逆行列 A^{-1}, B^{-1} がある.

そこで $C = B^{-1}A^{-1}$ とすると

$$AB \cdot C = (A \cdot B)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1}$$
$$= AA^{-1} = E_2$$

よって授業の定理32 (3) より

AB は正則で C は AB の逆行列である

(2) AB が正則として D を AB の逆行列とすると

$$\begin{cases} DAB = E_2 \\ ABD = E_2 \end{cases}$$ となる.

よって $(DA)B = E_2$ より

授業の定理32 (3) から

B は正則で DA は B の逆行列である

同様に $A(BD) = E_2$ より

授業の定理32 (3) から

A は正則で BD は A の逆行列である

$\boxed{7}$ (1) $\vec{u}+\vec{v}=3(\vec{a}+\vec{b})$より

$$\vec{a}+\vec{b}=\frac{1}{3}(\vec{u}+\vec{v})$$

(2) 1つ目の式より $|\vec{u}|=|\vec{v}|=1$.

よって $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ を示せばよい

2つ目の式としより

$$\vec{u}\cdot\left(\frac{1}{3}(\vec{u}+\vec{v})\right)=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{3}+\frac{1}{3}\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{u}\cdot\vec{v}=0$$

//

(3) $\vec{p} = c\vec{u} + d\vec{v}$ とすると

$\vec{p} - (\vec{a}+\vec{b})$

$= \vec{p} - \frac{1}{3}(\vec{u} + \vec{v})$

$= \left(c - \frac{1}{3}\right)\vec{u} + \left(d - \frac{1}{3}\right)\vec{v}$

よって $\|\vec{p} - (\vec{a}+\vec{b})\| \leqq 1/3$

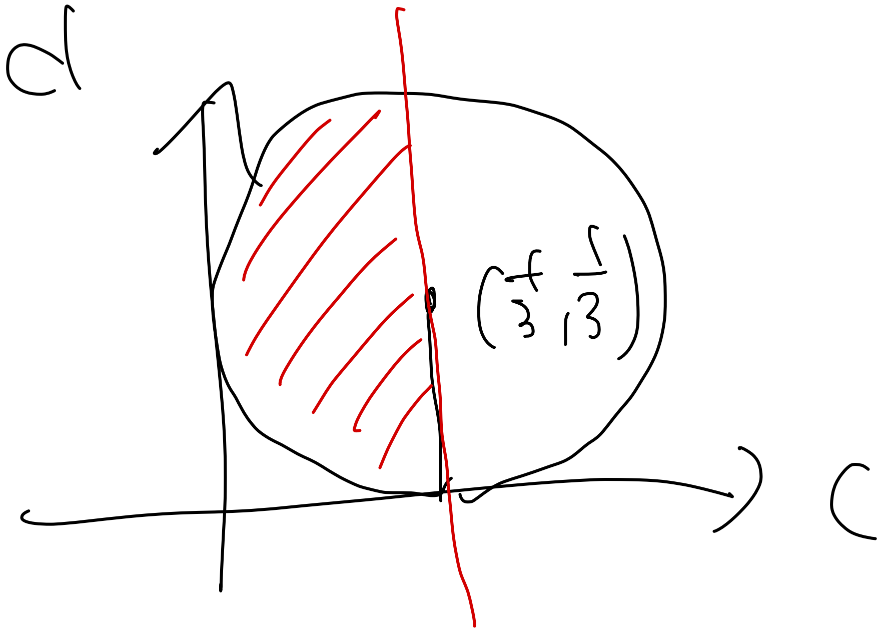
$\Longleftrightarrow \quad \left(c - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(d - \frac{1}{3}\right)^2 \leqq 1/3$ --- △1

$\vec{p} \cdot (2\vec{a}+\vec{b}) = \vec{p} \cdot \vec{u} = c$ より

$\vec{p} \cdot (2\vec{a}+\vec{b}) \leqq \frac{1}{3}$

$\Longleftrightarrow \quad c \leqq \frac{1}{3}$ --- △2

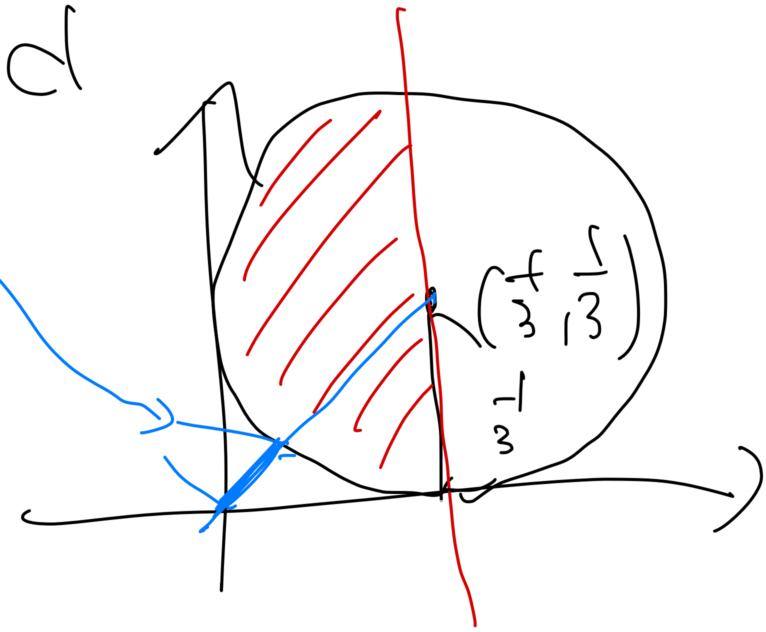
よって △1 と △2 の条件を図示すればよい



これをみたカ $\|p'\| = \sqrt{c^2+d^2}$ の最大最小は

最小

$$\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3}$$



最大

$$\frac{\sqrt{5}}{3}$$