演習問題 2024 年 11 月 19 日 (火)

下の問題を解け. なお解答は配布した解答用紙に解答すること.

ただし解答に関しては答えのみならず, 答えを導出する過程をきちんと記すこと. また解答用紙は 1 人 1 枚以上提出すること.

問題 1. 行列 A を次で定めるとき, 以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 & 8 \\ 3 & -1 & 2 & -5 \\ 18 & 0 & 2 & 12 \end{pmatrix}$$

1. A は何行何列の行列か?
2. A の $(3, 2)$ 成分を答えよ.
3. A の第 2 行を答えよ.
4. A の第 3 列を答えよ.

問題 2. 次の行列の計算をせよ.

1. $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^3 + 3 \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

問題 3. 次の問いに答えよ.

1. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ の行列式を求めよ.
2. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ
3. $\begin{pmatrix} 100 & 99 \\ 99 & 100 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ

問題 4.

1. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ とする. A を対角化せよ. また A^n を n を用いて表せ.
2. $B = \begin{pmatrix} 13 & -30 \\ 5 & -12 \end{pmatrix}$ とする. B を対角化せよ. また B^n を n を用いて表せ.

問題は裏面に続く

問題 5. 2×2 行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする.

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} \end{array}$$

を一次変換といい, A を f に対応する行列という. 次の問いに答えよ.

1. 45 度反時計回りに回転する 1 次変換 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ に対応する 2×2 行列を求めよ.
2. x 軸に関しての反転 (折り返し) を表す 1 次変換を $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ に対応する 2×2 行列を求めよ.
3. 「45 度反時計回りに回転して, x 軸に関しての反転を行う」変換は「x 軸に関しての反転をして, 315 度反時計回りに回転する」変換と同じであることを示せ.

問題 6.

1. 2 次正方行列 A,B について, A と B が正則行列ならば, AB も正則行列であることを示せ.
2. 2 次正方行列 A,B について, AB が正則行列ならば, A も B も正則行列であることを示せ.

問題 7. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^2$ を

$$||2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|| = ||\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|| = 1 \quad \text{かつ} \quad (2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \frac{1}{3}$$

となるものとする. 次の問いに答えよ.

1. $\boldsymbol{u}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ とおく. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ を用いて表せ.
2. $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ は $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底となることを示せ. 特に基底となるので, 任意の点 $\boldsymbol{p}$ について, ある実数 c,d があって, $\boldsymbol{p}=c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{v}$ と表せられる.
3. $$||\boldsymbol{p}-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})|| \leqq \frac{1}{3} \quad \text{かつ} \quad \boldsymbol{p}\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \leqq \frac{1}{3}$$

   となるように $\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^2$ が動くとき, $||\boldsymbol{p}||$ の最大値と最小値を求めよ.

解答用紙

学籍番号:　　　　　　　　　　　名前