期末試験 2025 年 1 月 21 日 (火) の講評

全体の講評

ものすごくよくできていました. 持ち込み可の試験で演習問題から 4 問出しているので, 6 割くらいの人ははできるだろうと思っていましたが, こんなにも多くの人がきちんと解答しているとは思いませんでした. ケアレスミスで成績が左右される試験だったので, もっと難しくすればよかったなと後悔しております. 各問題の得点率は以下の通りです.

問.1 90.1%
問.2 92.8%
問.3 66.6%
問.4 82.2%
問.5 86.1%
問.6 74.1%
問.7 14.7%

各問題の講評

- 問題 1 ほぼ全員できてましたが一部の人が $CD = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ができていませんでした.

3×3 行列になります.

- 問題 2 これもほぼ全員できてました.
- 問題 3

「x 軸に関しての反転を行う変換」に対応する行列を A とし, 「135 度反時計回りに回転する変換」に対応する行列を B とするとき, 「x 軸に関しての反転を行い, 135 度反時計回りに回転する」変換に対応する行列は BA となります.

これは演習問題の１回目の講評にも書きました.

- 問題 4 これもよくできていました. ただ拡大係数行列を簡約化してその後に連立一次方程式に戻す作業ができていない人がいました.

つまり $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -2 & -4 \end{pmatrix}$ を簡約化して $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となれば, 一次方程式は

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad + x_3 \quad\quad = 7 \\ \quad\quad x_2 + x_3 \quad\quad = -2 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad x_4 = -1 \end{cases}$$

となるので, あとはこれを解くだけです.

- 問題 5 この問題から授業でも演習やっていない問題になります．ですが予想に反してできていました．とりあえず文字 a を入れて簡約化すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+3 \end{pmatrix}$$

となります. よって一次方程式は

$$\begin{cases} x_1 & & + & x_3 & + & 7x_4 & = & 5 \\ & x_2 & - & 2x_3 & - & x_5 & = & -3 \\ & & & & & 0 & = & a+3 \end{cases}$$

となります．これが解を持つには一番下の式 $0 = a+3$ が常に成り立ちます．(そうでない場合は解を持たない) そして $a = -3$ の場合はきちんと解があります.

- 問題 6 数列と行列の関係を求める問題です．が, 誘導があんまり上手くいかずほとんど多くの人が「数列を先に求めちゃって ((3) を先にやって) その後 (2) の答えを出す」という方法をしていました．まあそれも数学的に間違いではないので正答にしました．模範解答としては (2) は

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a_{n+1} - 2a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

なのでこれを帰納的にやればでます．(3) は (1) と (2) から帰結されます.

　よく考えると二項間漸化式を解くのに特性方程式 $x^2 = 3x - 2$ を解きます．実はこれは A の固有値を求めることに対応してます．あと行列を用いれば数列がこのように”システマティック”に解くことができます.

　最後に一つ気になったのは, 二項間漸化式解けてない人がまあまあいたことです．大学入試でこれはやったのでは?と思いました.

- 問題 7 パズルみたいな問題です．電車の中でこの問題をひらめき, 試験問題にしたら面白そうだと思って問題 7 におきました.

　(1) で”できない”と答えた人が 8 割を占めていました．操作 1-3 は簡約化ですが操作 4-6 は簡約化とは別の操作です．簡約化すれば $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ になるのでその後に

1. 操作 6 で 4 列目に 3 列目の -1 倍を足す.
2. 操作 5 で 4 列目と 5 列目を交換する.

を行えば良いです.

　(2). この問題を完全に解けている人はいませんでした.

ただ「簡約化すれば $\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ となるので 0 が下に集まるからできない」という答えはいい線を言っていると思いました.

要は”rank”というものが鍵となります. もっというと操作 1-6 は rank を変えない操作であることがわかります. なので rank が違えば操作で移り合わないことがわかります.

$\boxed{1}$

$A = 3\times2 \quad B\ 2\times2$

$\rightarrow AB \quad 3\times2.$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 10 & -8 \\ 12 & -4 \end{pmatrix}$$

$B \quad 2\times2 \quad A\ 3\times2 \longrightarrow \times$

$A \quad 3\times2 \quad C\ 3\times1 \longrightarrow \times$

$C \quad 3\times1 \quad A\ 3\times2 \longrightarrow \times$

$A \quad 3\times2 \quad D\ 1\times3 \longrightarrow \times$

$D \quad 1\times3 \quad A\ 3\times2$

$\rightarrow DA \quad 1\times2$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+2+2 & -2+6+2 \end{pmatrix}$$

$$= (-2,\ 6),$$

$B \quad 2\times2 \quad C\ 3\times1 \rightarrow \times$

$C\ 3\times1 \quad B\ 2\times2 \rightarrow \times$

$B\ 2\times2 \quad D\ 1\times3 \quad \rightarrow \times$

$D\ 1\times3 \quad B\ 2\times2 \quad \rightarrow \times$

$C\ 3\times1 \quad D\ 1\times3$

$\rightarrow CD \quad 3\times3$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -10 & 10 & 5 \\ -6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$D\ 1\times3 \quad C\ 3\times1$

$\rightarrow DC \quad 1\times1$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+10+3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 15 \end{pmatrix}$$

$\boxed{F4\ 1/2}$

$$AB = \begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 10 & -8 \\ 12 & -4 \end{pmatrix} \qquad DA = \begin{pmatrix} -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$CD = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -10 & 10 & 5 \\ -6 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad DC = \begin{pmatrix} 15 \end{pmatrix}$$

② 判別式通りにする

判別式

$$\det(A - tE_2) = \det\begin{pmatrix} 1-t & -2 \\ 1 & 4-t \end{pmatrix} = 0$$

をもとめる

$$(1-t)(4-t)+2 = 0$$

$$t^2-5t+4+2 = 0$$

$$t-5t+6 = 0$$

$$(t-2)(t-3) = 0$$

$$t = 2,\ 3$$

② $Ax = 2x$ なる x をもとめる

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2y_1 \end{pmatrix}$$ より

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$ としてよい

$Ax = 3x$ なる x を求める

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$ としてよい,

③ $P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ とおくと

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$ となる

また $(P^{-1}AP)^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ より

$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$ から

$$A^n = P\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{-2+1}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$ より

$$A^n = P \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

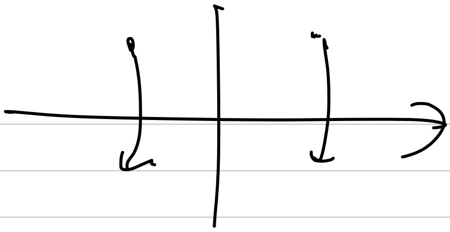
$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2^n & 3^n \\ -2^n & -3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

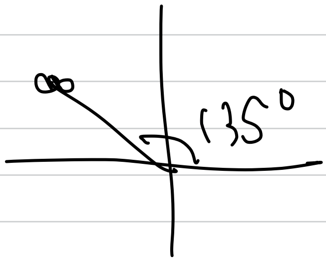
$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2^n - 3^n & 2(2^n - 3^n) \\ -2^n + 3^n & -2^n + 2 \cdot 3^n \end{pmatrix}$$

//

$\boxed{3}$ (1) x軸に関しての反転



$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$



135度反時計回転

$$B=\begin{pmatrix}\cos 135^\circ & -\sin 135^\circ\\ \sin 135^\circ & \cos 135^\circ\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$

よって「x軸反転して135度反時計回転」は

$$BA=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$

//

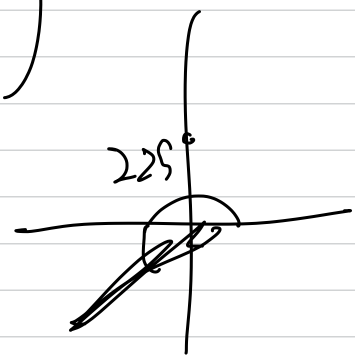
(2)

x軸反転 に 135度反時計回転 に x軸反転 は

$$ABA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$



$$= \begin{pmatrix} \cos 225^\circ & -\sin 225^\circ \\ \sin 225^\circ & \cos 225^\circ \end{pmatrix}.$$

$\boxed{答}$ $\alpha = 225$

$\boxed{補足}$ $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha^\circ & -\sin\alpha^\circ \\ \sin\alpha^\circ & \cos\alpha^\circ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(360^\circ-\alpha^\circ) & -\sin(360^\circ-\alpha^\circ) \\ \sin(360^\circ-\alpha^\circ) & \cos(360^\circ-\alpha^\circ) \end{pmatrix}$$

(1)

(4) 引き続ける

① 拡大係数行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$ である

② これを簡約化すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

-1 -1 1 1

-2 -2 2 2

-3 -3 3 3

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

-4 4

1 -1

-1 1

C　　$\vec{d}'$

③ $C\vec{x} = \vec{d}$ をとく。

つまり
$$\begin{aligned} x_1 \quad\; + x_3 &= 17 \\ x_2 + x_3 &= -2 \\ x_4 &= -1 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

よって
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 - t \\ -2 - t \\ t \\ -1 \end{pmatrix}$$
t 実数

(t∈ℝ)

$\boxed{5}$　aはあるがそのまま
手順通りやってみる

① 拡大係数行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & a \end{pmatrix}$$

② 行簡約化すると　　　$-2\ -2\ 2\ -4\ -4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & a \end{pmatrix}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+3 \end{array}\right)$$　$-1\ 2\ 5\ 3$

C　　　d

③ $Cx = d$ をとくと

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + 7x_4 = 5 \\ x_2 - 2x_3 - 5x_4 = -3 \\ 0 = a+3 \end{cases}$$

$a \neq -3$ なら最後の式より解はない

$a = -3$ なら

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - s - 4t \\ -3 + 2s + 5t \\ s \\ t \end{pmatrix}$$ という解がある

$(s, t$ 定数$)$

$\boxed{\text{答}}$ $a = -3$

6

(1) 利俊を刷ける

①

$$\det(A - tE_2) = \det\begin{pmatrix} 3-t & -2 \\ 1 & -t \end{pmatrix} = 0$$

$$-t(3-t) + 2 = 0$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$(t-1)(t-2) = 0$$

$$t = 1, 2.$$

② $Ax = 1x$ なる x を求める

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$Ax = 2x$ なる x を求める

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ 2y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって $P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}A^nP = (P^{-1}AP)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

$$A^n = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}P^{-1}$$

$P^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ より

$$A^n = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2\cdot 2^n \\ 1 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 2^n - 1 & 2 - 2\cdot 2^n \\ -1 + 2^n & 2 - 2^n \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & 2 - 2^{n+1} \\ 2^n - 1 & 2 - 2^n \end{pmatrix} \quad //$$

(2) $$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a_{n+1} - 2a_n \\ a_{n+1} + 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$= A^2 \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \cdots$$

$$= A^n \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

$$= A^n \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(3) $$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2-2^{n+1} \\ 2^n-1 & 2-2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot (2^{n+1}-1) + 2-2^{n+1} \\ 3 \cdot (2^n-1) + 2-2^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2^{n+1} - 1 \\ 2 \cdot 2^n - 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^{n+2} - 1 \\ 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix}$$

$$a_{n+2} = 2^{n+2} - 1$$

$$a_n = 2^n - 1$$ //

$\boxed{17}$ (1) できる

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{③} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{③} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{③} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{③} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{⑥} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(5) $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ //

(2) ごまない

まず $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ を簡約化する

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & & O & & \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & O & & \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & O & & \end{pmatrix}$$

次に操作4−6をすることで

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & O & & \end{pmatrix} \xrightarrow{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & O & & \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

もし $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ が $\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & O & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \end{pmatrix}$ に

することができれば

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ も $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ に

することができる。

(なぜなら操作1−6すべて可逆だからである)

部分点をもらう解答

よって、rankが2つともちがうので

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ を $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ に

することはできない

ここまで完ぺきでなくても
これに近いことをかいていれば
採点します。

ここの証明は難しいが
以下のとおりにかくことが
できる

ここで操作1−3は行列を左から
かけることで実現できる。

例えば

1行をa倍する操作は

$$\begin{pmatrix} a & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$ に対応し

1行目と2行目を交換することは

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$ に対応する。

同様に操作1−6も行列を
左からかけることに対応する

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ が $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ に

することができれば

4×4行列A

5×5 行列 B を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とする

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right)$$

とし、

$$B = \left(\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline B_3 & B_4 \end{array}\right)$$

$A_1 \sim A_4$, B_1 2×2

B_2 2×3 行列

B_3 3×2 [illegible]

B_4 3×3

$$\left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix} & O \\ \hline O & O \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline B_3 & B_4 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix}1 & \\ & 1\end{matrix} & O \\ \hline O & \begin{matrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{matrix} \end{array}\right)$$

であるので

左辺を計算すると

$$\left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix} & O \\ \hline O & O \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline B_3 & B_4 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} A_1 & O \\ \hline A_3 & O \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline B_3 & B_4 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} A_1B_1 & A_1B_2 \\ \hline A_3B_1 & A_3B_2 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & & O \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & 0 \\ & O & 1 & 0 \end{array}\right)$$ となる

∴ ① $A_1B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

② $A_1B_2 = O$ である

③ $A_3B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

①より A_1 は正則より、A_1^{-1}がある

②から $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる

これは ③ に矛盾する //

補足

行列 P を操作1-6を何かにしてQにすることができる必要な条件は rank P = rank Q である

ちょっとこの証明はムズいので（めんどう）厳密な証明ぬきでも、こんかいは甘めに採点します