期末試験

2024 年度秋冬学期 大阪大学 全学共通教育科目 線形代数学概論 (医 (放・検))

岩井雅崇 (いわいまさたか) 2025/01/21

下の問題を解け. ただし解答に関しては答えのみならず, 答えを導出する過程をきちんと記すこと.

第 1 問. 次の行列 A, B, C, D を次で定義する.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$AB, BA, AC, CA, AD, DA, BC, CB, BD, DB, CD, DC$ の 12 個の組み合わせのうち, 積が定義されるものを全て求め, その積を計算せよ.

第 2 問. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ とする. A を対角化せよ. また A^n を n を用いて表せ.

第 3 問 2×2 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする.

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} \end{array}$$

を一次変換といい, A を f に対応する行列という. 次の問いに答えよ.

(1). 「x 軸に関しての反転を行い, 135 度反時計回りに回転する変換」に対応する 2×2 行列を求めよ.

(2). 「x 軸に関しての反転を行い, 135 度反時計回りに回転し, さらに x 軸に関しての反転を行う変換」を $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ とする. g は「α 度反時計回りに回転する変換」と同じである. α の値を求めよ. ただし $0 \leqq \alpha \leqq 360$ とする.

第 4 問. 行基本変形と行列の簡約化を用いて, 次の連立 1 次方程式の解を求めよ.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = -1 \\ \phantom{x_1 + {}} 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -4 \end{cases}$$

第 5 問. 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 = 1 \\ \phantom{2x_1 + {}} x_2 - 2x_3 - 5x_4 = a \end{cases}$ の解が存在するような a の値を全て求めよ.

第 6 問に続く.

第6問 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める.

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n \quad a_1 = 1, a_2 = 3$$

また行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする. 次の問題に答えよ.

(1). A を対角化せよ. また A^n を n を用いて表せ.

(2). 1 以上の整数 n について $\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ であることを示せ.

(3). 3 以上の整数 n について, a_n を n を用いて表せ.

第7問 各成分が実数である行列に関して次の 6 つの操作を考える.

操作 1. 1 つの行を何倍か ($\neq 0$ 倍) する.
操作 2. 2 つの行を入れ替える.
操作 3. 1 つの行に他の行の何倍かを加える.
操作 4. 1 つの列を何倍か ($\neq 0$ 倍) する.
操作 5. 2 つの列を入れ替える.
操作 6. 1 つの列に他の列の何倍かを加える.

次の問いに答えよ.

(1). $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ は上の操作 1-6 を繰り返して, 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ にすることができるか? できる場合はどのように操作すればいいかをかき, できない場合はその理由を答えよ.

(2). $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ は上の操作 1-6 を繰り返して, 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ にすることができるか? できる場合はどのように操作すればいいかをかき, できない場合はその理由を答えよ.

なお (1)(2) の解答に関しては次の問題例・解答例を参考にせよ.

(問題例) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ は上の操作 1-6 を繰り返して, 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ にすることができるか?

(解答例) できる. 以下のように操作すれば良い.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

また「できない場合の理由」に関しては厳密な証明でなくても良い (厳密に証明をするとかなり難しい). 何かしら解答に関連することを書いていれば部分点を与える.

問題は以上である.