中間レポート 2 提出用紙

提出締め切り 2025 年 1 月 24 日 (金) 15 時 10 分 00 秒 (日本標準時刻)

学籍番号: 名前

提出方法

- 1 月 24 日 (金) の授業を始める時に「紙で提出する」もしくは「電子媒体 (PDF) などで CLE から提出」してください. 紙で提出する場合はこの用紙を表紙にしてホッチキスで左上をとめて提出すること.
- 解答に関しては答えのみならず, 答えを導出する過程をきちんと記すこと.
- レポート問題に関しては CLE に解答があるのでそれを活用してよい. ただし意味もなく丸写ししても時間の無駄なので, 使う際はなぜその解答になるのか考えながら活用すること.

レポート問題

問題 1 (演習問題 4.1) $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ を円周とする.

$$U = S^1 \setminus \{(1,0)\} \quad \varphi_U(\cos\theta_U, \sin\theta_U) = \theta_U \quad (0 < \theta_U < 2\pi)$$

$$V = S^1 \setminus \{(-1,0)\} \quad \varphi_V(\cos\theta_V, \sin\theta_V) = \theta_V \quad (-\pi < \theta_V < \pi)$$

として座標近傍 $(U, \varphi_U), (V, \varphi_V)$ を定める. U 上の 1 次微分形式 α_U と V 上の 1 次微分形式 α_V を

$$\alpha_U = d\theta_U, \quad \alpha_U = d\theta_V$$

とする. このとき $U \cap V$ 上で $\alpha_U = \alpha_V$ であることを示せ. これにより S^1 上の微分形式 α を

$$\alpha_x = \begin{cases} (\alpha_U)_x & (x \in U) \\ (\alpha_V)_x & (x \in V) \end{cases}$$

として定めることができる.

問題 2 (演習問題 4.2) $\varphi : S^1 \to \mathbb{R}^2$ を包含写像とし, α を問題 1 での S^1 上の 1 次微分形式とする. このとき以下が成り立つことを示せ.

$$\varphi^* \left(\frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} \right) = \alpha$$

問題 3 (演習問題 4.4) $i : S^2 \to \mathbb{R}^3$ を包含写像とする. 次の問いに答えよ.

(a) $i^*(dx \wedge dy \wedge dz)$ を求めよ.

(b) $B = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u^2 + v^2 < 1\}$ とし, $\varphi : B \to S^2$ を $\varphi(u,v) = (u, \sqrt{1 - u^2 - v^2}, v)$ とする. $(i \circ \varphi)^*(dx \wedge dy)$ の値が 0 になる B の点を全て求めよ.

(c) $i^*(dx \wedge dy)$ の値が 0 になる S^2 の点を全て求めよ.

問題 4 (演習問題 5.2) 問題 1 において定義した S^1 上の 1 次微分形式 α について, $\int_{S^1} \alpha$ の値を求めよ.

問題 5 (演習問題 5.4) $\int_{S^2} xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$ を求めよ.