

# 中間レポート1 提出用紙

提出締め切り 2024年11月15日(金) 15時10分00秒(日本標準時刻)

学籍番号:

名前

---

## 提出方法

- 11月15日の授業が始める時にレポートを回収いたします。
- この用紙を表紙にしてホッチキスで左上をとめて提出すること。
- 解答に関しては答えのみならず、答えを導出する過程をきちんと記すこと。
- レポート問題に関してはCLEに解答があるのでそれを活用してよい。ただし意味もなく丸写ししても時間の無駄なので、使う際はなぜその解答になるのか考えながら活用すること。

## レポート問題

- 問題.1 (演習問題 1.1)  $S^n := \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$  とおく。  $S^n$  の座標近傍系を具体的に構成することにより、  $S^n$  は  $n$  次元の  $C^\infty$  級多様体となることを示せ。なお座標近傍系  $(U, \varphi)$  に関して  $\varphi$  が同相であることは示さなくても良い。
- 問題.2 (演習問題 1.2)  $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  となる  $C^\infty$  級写像で  $f^{-1}(1) = S^n$  かつ  $1 \in \mathbb{R}$  が  $f$  の正則値であるようなものを一つ求めよ。またこれを用いて  $S^n$  は  $n$  次元の  $C^\infty$  級多様体であることを示せ。
- 問題.3 (演習問題 2.2)  $f(r, \theta) = e^{-r^2} \cos \theta$ ,  $g(x, y, z) = \log(x^2 + y^2 + z^2)$  について、  $df$  と  $dg$  を求めよ。
- 問題.4 (演習問題 2.3)  $(xdx + ydy) \wedge (-xdx + ydy)$  と  $(xdx + ydy) \wedge (-ydx + xdy)$  を計算せよ。
- 問題.5 (演習問題 2.5)  $(xdx + ydy) \wedge (ydy + zdz) \wedge (xdx + zdz)$  を計算せよ。
- 問題.6 (演習問題 2.7)  $\omega = \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$  について、  $d\omega$  を求めよ。
- 問題.7 (演習問題 2.9)  $\varphi(x, y) = (x^m, y^n)$  とし、  $\eta = \frac{1}{x} dx + dy$  とする。  $\varphi^* \eta$  を求めよ。
- 問題.8 (演習問題 2.10)  $\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$  とし、  $\eta = \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$  とする。  $\varphi^* \eta$  を求めよ。
- 問題.9 (演習問題 2.12)  $\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$  とし、  $\eta = \frac{1}{x^2+y^2} dx \wedge dy$  とする。  $\varphi^* \eta$  を求めよ。