幾何学1 まとめノート

岩井雅崇 (大阪大学)

2024 年 10 月 4 日　ver 1.00

Contents

1　初めに

このノートは 2022 年度に幾何学 1 演義を担当したときに松本幸夫著「多様体の基礎」の内容を自分用にまとめたものである．参考程度に眺めてくれると幸いです．書き間違い等があるので，注意読んでください．なお石田先生の授業内容は 7 章からになります．

2　多様体の定義

多様体の基礎の座標近傍の定義や多様体の定義は次のとおりである．

定義 1. 位相空間 M の開集合 U から $\mathbb{R}^m$ の開集合 V への同相写像 $\varphi : U \to V$ について (U, φ) を m 次元座標近傍といい，φ を U 上の局所座標系という．
$p \in U$ について，$\varphi(p) = (x_1, \ldots, x_m)$ とかける．$x_1, \ldots, x_m$ を (U, φ) に関する p の局所座標という.(U, φ) のことを $(U; x_1, \ldots, x_m)$ と書くことがある．

定義 2. M をハウスドルフ空間とする．次の条件が成り立つとき M は m 次元 C^∞ 級多様体と呼ばれる．

1. 座標近傍系 $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ があって，$M = \cup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ となる．
2. $U_\lambda \cap U_\mu \neq \phi$ なる $\lambda, \mu \in \Lambda$ について $\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1} : \varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu) \to \varphi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$ は C^∞ 級写像である

「多様体の基礎」の定義のおける $x_1, \ldots, x_m$ は厳密に言えば $x_i : U \to \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ となる U 上の関数である．一方でこの本は後の方で「$(x_1, \ldots, x_m) \in \varphi(U)$ について...」と $x_1, \ldots, x_m$ が点を表しているように書いている．（これは初学者が大変困惑する同一視である．慣れたらこっちの方が楽ではあるが.）[1]

また局所座標系を明示する際には (U, φ) と $(U; x_1, \ldots, x_m)$ の二つがあるが私は後者を使うことをお勧めする．これは接ベクトル空間の定義 3 の (3) をよく使うからである.[2]

3　接ベクトル空間の定義

定義 3 (接ベクトル空間)**.** m 次元 C^∞ 級多様体 M と $p \in M$ について次の集合は一致する．

1. p における方向微分 v の集合 $D_p^\infty(M)$．ここで v が p における方向微分であるとは，p の開近傍で定義された C^∞ 級関数 ξ について実数 $v(\xi)$ を対応させる操作であって次を満たすものとする．
   (a) ξ, η が p の周りで一致すれば $v(\xi) = v(\eta)$.
   (b) 実数 a, b について $v(a\xi + b\eta) = av(\xi) + bv(\eta)$.

[1] 気になって別の本「トゥー 多様体 (L. W. Tu *An introduction to Manifolds.*)」を見たが，その本では区別して書いていた．「トゥー 多様体」の英語版は学内から Springer Link を経由することで無料で入手可能である．

[2]「トゥー 多様体」では「局所座標系を $(U, \varphi) = (U; x_1, \ldots, x_m)$ とする」と言う書き方をしていた．要するに座標系の書き方は世界共通ではなさそうだ．気になる人は「トゥー 多様体」の書き方でも良い．

(c) $v(\xi\eta) = v(\xi)\eta(p) + \xi(p)v(\eta)$.

2. 曲線 c に沿った方向微分 v_c 全体の集合．ここで c は M にはいる C^∞ 級曲線 $c:(-\epsilon,\epsilon)\to M$ で $c(0)=p$ を満たすものとし，v_c は p の開近傍で定義された C^∞ 級関数 ξ について実数
$$v_c : \xi \mapsto \left.\frac{d\xi(c(t))}{dt}\right|_{t=0}$$
を対応させるものとする．

3. $(U;x_1,\ldots,x_m)$ を p の周りの座標系とした場合の $(\frac{\partial}{\partial x_1})_p,\ldots,(\frac{\partial}{\partial x_m})_p$ ではられる $\mathbb{R}$ ベクトル空間 $T_p(M)$．ここで $(\frac{\partial}{\partial x_i})_p$ とは p の開近傍で定義された C^∞ 級関数 ξ について実数
$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p : \xi \mapsto \frac{\partial \xi}{\partial x_i}(p)$$
を対応させるものとする．

この $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間を<u>M の接ベクトル空間</u>と呼び T_pM とかく．

補足 4. C^∞ 級でない場合でも $(3)\subset(2)\subset(1)$ は成り立つ．ただ $(1)\subset(3)$ が成り立つのは C^∞ 級の多様体のみである (多様体の基礎 p.86 注意を見よ)．

また定義 3 の (3) においても定義 1 のような同一視がなされている．もっと正確に書けば，座標系を $(U,\varphi)=(U;x_1,\ldots,x_m)$ とし，$\varphi(U)\subset\mathbb{R}^m$ の標準座標を $r_1,\ldots,r_m$ とするとき，
$$\frac{\partial\xi}{\partial x_i}(p) := \frac{\partial(\xi\circ\varphi^{-1})}{\partial r_i}(\varphi(p)) \text{ となる．}$$

要するに接ベクトル空間 T_pM の元を表す方法は 3 つある．人にもよるが私は定義 3 の (3) の書き方がわかりやすいと思う．つまり $v\in T_pM$ の元はある $a_1,\ldots,a_m\in\mathbb{R}$ を用いて
$$v = \sum_{i=1}^m a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \text{ と書くことができる．}$$[3]

定義 5. M を m 次元 C^∞ 級多様体，N を n 次元 C^∞ 級多様体，$f:M\to N$ を C^∞ 級写像とする．$p\in M$ をとり $q:=f(p)\in N$ とする．次の写像 $(df)_p : T_p(M)\to T_q(N)$ は一致する．

1. p における方向微分 v について
$$(df)_p(v) : \eta \mapsto v(\eta\circ f)$$
と定義する．(η は q の開近傍で定義された C^∞ 級関数である)．$(df)_p(v)$ は q における方向微分となり，$T_q(N)$ の元となる．

2. 曲線 c に沿った方向微分 v_c(ただし c は C^∞ 級写像 $c:(-\epsilon,\epsilon)\to M$ で $c(0)=p$ を満た

[3] 接ベクトル空間を「何かよくわからないもの $(\frac{\partial}{\partial x_i})_p$ が $\mathbb{R}$ 上ではられるもの」と思うという荒技もある．これはベクトル束の立場から見るとそうなる．恥ずかしながら接ベクトル空間の厳密な定義を最近まで忘れていた．(ベクトル場を構成した論文を出してたので油断していました．)

すもの) について,

$$(df)_p(v_c) := v_{f\circ c}$$

と定義する. $f\circ c(0) = q$ を満たすため $v_{f\circ c}$ は $T_q(N)$ の元である.

3. $(V, y_1, \ldots, y_n)$ を q の周りの座標系, $(U; x_1, \ldots, x_m)$ を $f(U) \subset V$ となる p の周りの座標系とする. f を $(U; x_1, \ldots, x_m)$ と $(V, y_1, \ldots, y_n)$ によって局所座標表示したものを

$$y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, y_n = f_n(x_1, \ldots, x_m)$$

としたとき, $(df)_p : T_p(M) \to T_q(N)$ を次のように定義する.

$$(df)_p : \sum_{i=1}^{m} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \mapsto \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p)\right) \left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_q$$

この $(df)_p : T_p(M) \to T_q(N)$ をp における f の微分という.

補足 **6.** 定義 5 (3) において, $b_j = \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p)$ とおき, $n \times m$ 行の行列 $(Jf)_p$ を

$$(Jf)_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(p) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(p) \end{pmatrix} \text{とすれば,} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (Jf)_p \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \text{が成り立つ.}$$

$(Jf)_p$ をヤコビ行列と呼ぶ.[4] またここでも定義 1 のような同一視がなされている. 正確に書けば次のとおりである: 座標系を $(U, \varphi) = (U; x_1, \ldots, x_m)$ とする. $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ の標準座標を $r_1, \ldots, r_m$ とする. $(V, \psi) = (V, y_1, \ldots, y_n)$ を q の座標系とする. $\psi(z) = (y_1(z), \ldots, y_n(z))$ に注意すれば,

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p) := \frac{\partial(y_j \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial r_i}(\varphi(p)) \text{ となる.}$$

4 はめ込み・埋め込み・正則値

定義 **7** (埋め込みとはめ込み)**.** $f : M \to N$ を多様体の間の C^∞ 級写像とする.

- f がはめ込みであるとは, 任意の点 $p \in M$ について微分写像 $(df)_p : T_p(M) \to T_{f(p)}(N)$ が単射であること.
- f が埋め込みであるとは, f がはめ込みであり, $f : M \to f(M)$ が同相であることとする. ここで $f(M)$ には N の相対位相を入れる. このとき $f(M)$ は N の部分多様体であることが知られている.

[4] これは座標系 $(U; x_1, \ldots, x_m), (V, y_1, \ldots, y_n)$ に依存する.

定理 **8.** [多様体の基礎 定理 15-1]
$f : M \to N$ を多様体の間の C^∞ 級写像とする．さらに $q \in N$ を正則値であると仮定する．
$f^{-1}(q) \neq \varnothing$ ならば, $f^{-1}(q)$ は $\dim M - \dim N$ 次元の C^r 級部分多様体である．
ここで $q \in N$ が $f : M \to N$ の正則値であるとは, 任意の $p \in f^{-1}(q)$ について, 微分写像

$$(df)_p : T_p(M) \to T_{f(p)}(N)$$

が全射であることとする．

定理 8 の応用として, 多様体を新たに作る方法がある．多様体の作り方は大きく分けて次に分けられる．

- 多様体 M, N について, その直積 $M \times N$ は多様体．次元は $\dim M + \dim N$ である．
- 多様体 M の開集合 U は多様体．次元は $\dim M$ である．
- 多様体間の写像 $f : M \to N$ と $y \in N$ について, y が f の正則値ならば $f^{-1}(y)$ は M の部分多様体．次元は $\dim M - \dim N$ である．
- 多様体 M を同値関係 $\sim$ で割ってできる多様体 $M/\sim$．ただし常に $M/\sim$ が多様体になるとは限らない.[5] 参考までに次の事実が知られている.[リー群と表現論 第 6 章]「Lie 群 G が多様体 M に推移的かつ連続に作用しているとき, $G_x = \{g \in G | gx = x\} (x \in M)$ は閉部分群になり G/G_x は M と C^∞ 微分同相となる.」

5 ベクトル場の定義と性質

以下断りがなければ M を m 次元 C^∞ 級多様体とする．

定義 **9** (ベクトル場)**.**

1. $p \in M$ について $X_p \in T_pM$ が一つずつ対応しているとき, その対応 $X = \{X_p\}_{p \in M}$ を M 上のベクトル場という．
2. 座標近傍 $(U, x_1, \ldots, x_m)$ について, U 上のベクトル場 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ を
$$\frac{\partial}{\partial x_i} := \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \right\}_{p \in U} \text{ と定義する．}$$
3. M 上のベクトル場 X と座標近傍 $(U, x_1, \ldots, x_m)$ について, ある U 上の関数 $\xi_i : U \to \mathbb{R}$ があって
$$X|_U = \{X_p\}_{p \in U} = \xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \xi_m \frac{\partial}{\partial x_m}$$
とかける．各座標近傍 $(U, x_1, \ldots, x_m)$ について上の ξ_i が C^∞ 級となるとき, X は C^∞ ベクトル場であるという M 上の C^∞ 級ベクトル場の集合を $\mathscr{X}(M)$ で表す．

[5] 私が学部生だったとき群 G が多様体 M に固定点自由かつ真性不連続に作用している場合の内容をやった．

定義 10 (ベクトル場の演算)**.** X, Y を M 上の C^∞ ベクトル場, f を M 上の C^∞ 級関数とする.

1. $p \in M$ について $Xf(p) := X_p(f)$ と定義する (定義 3 の (1) を使った). Xf を関数 f にベクトル場を作用させて得られる関数と呼ぶ. 座標近傍 $(U, x_1, \ldots, x_m)$ について $X|_U = \xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \xi_m \frac{\partial}{\partial x_m}$ と書けている場合
$$Xf(p) = \xi_1(p)\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) + \cdots + \xi_m(p)\frac{\partial f}{\partial x_m}(p) \text{ となる.}$$
2. X, Y のかっこ積 (Lie bracket)を $[X, Y] := XY - YX$ と定める. $[X, Y]$ は C^∞ 級ベクトル場となる. 座標近傍 $(U, x_1, \ldots, x_m)$ について $X|_U = \sum_{i=1}^m \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}, Y|_U = \sum_{i=1}^m \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ と書けている場合
$$[X, Y]|_U = (XY - YX)|_U = \sum_{i=1}^m \left\{ \sum_{j=1}^m \left(\xi_j \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} - \eta_j \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \right) \right\} \frac{\partial}{\partial x_i} \text{ となる.}$$
3. $F : M \to N$ を C^∞ 級微分同相写像とする. M 上の C^∞ 級ベクトル場 X について, N 上のベクトル場 F_*X を $(F_*X)_{f(p)} := (dF)_p(X_p)$ とする.

6 積分曲線・1 パラメーター変換群・リー微分

以下断りがなければ M を m 次元 C^∞ 級多様体とし, X を C^∞ 級ベクトル場とする.

定義 11 (積分曲線)**.** a を実数または $-\infty$, b を実数または $+\infty$ とし, 開区間 (a, b) は 0 を含むとする. C^∞ 級曲線 $c : (a, b) \to M$ が X の積分曲線であるとは, 任意の $\alpha \in (a, b)$ について
$$\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=\alpha} = X_{c(\alpha)}$$
が成り立つこととする (左辺に関しては定義 3 参照)**.** $c(0) = p$ を c の初期値という.

定理 12 (積分曲線の局所的な存在と一意性)**.**

1. 任意の $p \in M$ について, 正の数 $\epsilon > 0$ と $c(0) = p$ となる積分曲線 $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ が存在する.
2. 0 を含む開区間 $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ と積分曲線 $c_1 : (a_1, b_1) \to M$, $c_2 : (a_2, b_2) \to M$ について, $c_1(0) = c_2(0)$ ならば, c_1 と c_2 は $(a_1, b_1) \cap (a_2, b_2)$ 上で一致する.

定義 13.

1. $p \in M$ を初期値とする積分曲線 $c_p : (a, b) \to M$ で定義域をこれ以上広げられないも

のを極大積分曲線という.

2. 任意の $p \in M$ を初期値とする極大積分曲線 $c_p : (a,b) \to M$ の定義域 (a,b) が $\mathbb{R}$ であるとき, X は完備なベクトル場であるという.

c_p を p を初期値とする極大積分曲線 [6] とすると, $t \in \mathbb{R}$ について $c_p(t)$ は"ベクトル場 X に沿って時間 t だけ流した時の位置"を対応させているとみれる.

定理 14. X を完備な C^∞ 級ベクトル場とし, $p \in M$ を通る極大積分曲線を $c_p : \mathbb{R} \to M$ とする. $t \in \mathbb{R}$ について $\varphi_t : M \to M$ を

$$\begin{array}{rccc} \varphi_t : & M & \to & M \\ & p & \mapsto & c_p(t) \end{array}$$

とおく. このとき $\varphi_t : M \to M$ は C^∞ 級同相写像であり次が成り立つ.

1. $\varphi_0 = \mathrm{id}_M$.
2. $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$ $(\forall t, s \in \mathbb{R})$.
3. $\varphi_{-t} = (\varphi_t)^{-1}$ $(\forall t \in \mathbb{R})$.
4. 次の写像 $F : \mathbb{R} \times M \to M$ は C^∞ 級写像である

$$\begin{array}{rccc} F : & \mathbb{R} \times M & \to & M \\ & (t,p) & \mapsto & \varphi_t(p) \end{array}$$

逆に C^∞ 級同相写像の族 $\{\varphi_t : M \to M\}_{t \in \mathbb{R}}$ が上の 4 条件を満たすとき, 定義 3 の (2) を用いてベクトル場 $X = \{X_p\}_{p \in M}$ を

$$X_p := \left.\frac{d\varphi_t(p)}{dt}\right|_{t=0} \in T_pM$$

で定義すると, X が完備なベクトル場であり p を初期値とする極大積分曲線は $c(t) = \varphi_t(p)$ で与えられる.
このような C^∞ 級同相写像の族 $\{\varphi_t : M \to M\}_{t \in \mathbb{R}}$ を1 パラメーター変換群と呼ぶ.

要するに「完備なベクトル場」と「1 パラメーター変換群」は 1 対 1 に対応する. 完備なベクトル場 X に対応する 1 パラメーター変換群 $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ を $\{\mathrm{Exp}(tX)\}_{t \in \mathbb{R}}$ と表すこともある.

補足 15. C^∞ 級写像 $F : \mathbb{R} \times M \to M$ がフローとは $F(0,p) = p$ かつ $F(t, F(s,p)) = F(t+s, p)$ を満たすこととする. フローと 1 パラメーター変換群が一対一に対応する.

定理 16. X を完備な C^∞ 級ベクトル場とし, C^∞ 級同相写像の族 $\{\varphi_t : M \to M\}_{t \in \mathbb{R}}$ を 1 パラメーター変換群とする. C^∞ 級関数 f とベクトル場 Y についてリー微分 $\mathcal{L}_X(f), \mathcal{L}_X(Y)$

[6] 多様体の基礎では $c_p(t)$ を $c(t,p)$ と書いている.

をそれぞれ以下で定める.

$$\mathcal{L}_X(f) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi_t^* f - f}{t} \quad \mathcal{L}_X(Y) = \lim_{t\to 0} \frac{(\varphi_{-t})_* Y - Y}{t}$$

このとき次が成り立つ.

1. $\mathcal{L}_X(f) = Xf$, $\mathcal{L}_X(Y) = [X, Y]$.
2. $[X, Y] = 0$ であることは任意の $t \in \mathbb{R}$ について $(\varphi_t)_* Y = Y$ となることと同値である.
3. $\{\psi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ を Y の 1 パラメーター変換群とする. $[X, Y] = 0$ であることは任意の $s, t \in \mathbb{R}$ について $\varphi_t \circ \psi_s = \psi_t \circ \varphi_s$ を満たすことと同値である.

定理 17. C^∞ 級写像 $f : M \to \mathbb{R}$ が固有な沈め込みであれば, 任意の $a, b \in \mathbb{R}$ について $f^{-1}(a)$ と $f^{-1}(b)$ は C^∞ 級微分同相である. ここで f が固有とは任意のコンパクト集合の f の逆像がコンパクトになることとし, f が沈め込みとは任意の $p \in M$ について $(df)_p$ が全射であることとする.

7 ベクトル空間のテンソル積

定義 18. V を m 次元の $\mathbb{R}$ ベクトル空間とする.

- V の双対ベクトル空間 V^* を $V^* := \{\omega : V \to \mathbb{R} \,|\, \omega \text{ は線型写像}\}$ とする.
- $\{e_1, \ldots, e_m\}$ を V の基底とするとき, $1 \leq i \leq m$ なる i について $\omega_i \in V^*$ を

$$\begin{array}{cccc} \omega_i : & V & \to & \mathbb{R} \\ & a_1 e_1 + \cdots + a_m e_m & \mapsto & a_i \end{array}$$

  と定義する. $\{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$ は V^* の基底で, $\{e_1, \ldots, e_m\}$ の双対基底と呼ばれる.
- V 上の k 次多重線型形式とは $\omega : V^k = V \times \cdots \times V \to \mathbb{R}$ となる写像で $\omega(v_1, \ldots, v_k)$ が各 v_i について線型であることとする. V 上の k 次多重線型形式なす m^k 次元のベクトル空間を $\otimes^k V^*$ と表す.
- $\omega \in \otimes^k V^*$ が k 次対称形式であるとは, 任意の k 次の置換 σ と, 任意の $(v_1, \ldots, v_k) \in V^k$ について $\omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = \omega(v_1, \ldots, v_k)$ となることとする.
- $\omega \in \otimes^k V^*$ が k 次交代形式であるとは, 任意の k 次の置換 σ と, 任意の $(v_1, \ldots, v_k) \in V^k$ について $\omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\omega(v_1, \ldots, v_k)$ となることとする. V の k 次交代形式の ${}_mC_k$ 次元のベクトル空間を $\wedge^k V^*$ で表す.

例 19. $\eta_1, \ldots, \eta_k \in V^*$ について

$$\begin{array}{cccc} \eta_1 \otimes \cdots \otimes \eta_k : & V \times \cdots \times V & \to & \mathbb{R} \\ & (v_1, \ldots, v_k) & \mapsto & \eta_1(v_1) \cdots \eta_k(v_k) \end{array} \quad \begin{array}{cccc} \eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_k : & V \times \cdots \times V & \to & \mathbb{R} \\ & (v_1, \ldots, v_k) & \mapsto & \det((\eta_i(v_j))_{1\leq i,j\leq k}) \end{array}$$

と定義する. $\eta_1 \otimes \cdots \otimes \eta_k \in \otimes^k V^*$ であり$\eta_1, \ldots, \eta_k$ のテンソル積と呼ばれる.

$\{e_1, \ldots, e_m\}$ を V の基底とし, $\{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$ を $\{e_1, \ldots, e_m\}$ の双対基底とするとき, $\{\omega_{i_1} \otimes \cdots \otimes \omega_{i_k}\}_{i_1, \ldots, i_k = 1, \ldots, m}$ は $\otimes^k V^*$ の基底となる. また $\{\omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_k}\}_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m}$ は $\wedge^k V^*$ の基底となる. 定義から $\omega_2 \wedge \omega_1 = -\omega_1 \wedge \omega_2$ や $\omega_1 \wedge \omega_1 = 0$ であることがわかる.

8 微分形式

定義 20.

- $p \in M$ について, 接ベクトル空間 T_pM の双対空間を余接ベクトル空間と呼び T_p^*M と表す.
- 任意の $p \in M$ について $\omega_p \in T_p^*M$ が一つずつ対応しているとき, その対応 $\omega = \{\omega_p\}_{p \in M}$ をM 上の 1 次微分形式という.
- 座標近傍 $(U, x_1, \ldots, x_m)$ について $(dx_i)_p$ を

$$\begin{array}{rccc} (dx_i)_p : & T_pM & \to & \mathbb{R} \\ & a_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p + \cdots + a_m \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p & \mapsto & a_i \end{array}$$

とし, U 上の 1 次微分形式 $dx_i := \{(dx_i)_p\}_{p \in U}$ と定義する. これにより M 上の 1 次微分形式は座標近傍 $(U, x_1, \ldots, x_m)$ について, ある U 上の関数 $f_i : U \to \mathbb{R}$ があって

$$\omega|_U = f_1 dx_1 + \cdots + f_m dx_m$$

とかける. 各座標近傍 $(U, x_1, \ldots, x_m)$ について上の f_i が C^∞ 級となるとき, ω は C^∞ 級 1 次微分形式という.

例 21. $f : M \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級写像とすると, 微分写像 $df_p : T_pM \to T_{f(p)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ により, $df := \{df_p\}_{p \in M}$ は M 上の 1 次微分形式だと思える. 座標近傍 $(U, x_1, \ldots, x_m)$ を用いて 1 次微分形式 df は

$$df|_U = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \text{と表せられる.}$$

定義 22. $k = 1, \ldots, m = \dim M$ となる自然数とする.

- 任意の $p \in M$ について $\omega_p \in \wedge^k T_p^*M$ が一つずつ対応しているとき, その対応 $\omega = \{\omega_p\}_{p \in M}$ をM 上の k 次微分形式という.
- M 上の k 次微分形式 ω は座標近傍 $(U, x_1, \ldots, x_m)$ について, ある U 上の関数 $f_{i_1 i_2 \cdots i_k} : U \to \mathbb{R}(1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m)$ があって

$$\omega|_U = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m} f_{i_1 i_2 \cdots i_k} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

とかける. 各座標近傍 $(U, x_1, \ldots, x_m)$ について上の $f_{i_1 i_2 \cdots i_k}$ が C^∞ 級となるとき, X はC^∞ 級 k 次微分形式であるという.

断りのない限り微分形式は全て C^∞ 級であるとする.

定義 23 (外積). M 上の k 次微分形式 ω と l 次微分形式 η について, その外積 $\omega\wedge\eta$ を

$\omega\wedge\eta(X_1,\dots,X_{k+l}) = \dfrac{1}{k!l!}\displaystyle\sum_{\sigma\in S_{k+l}} \mathrm{sgn}(\sigma)\omega(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(k)})\eta(X_{\sigma(k+1)},\dots,X_{\sigma(k+l)})$ とする.

$\omega=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le m} f_{i_1\cdots i_k}dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}$, $\eta=\sum_{1\le j_1<\cdots<j_l\le m} g_{j_1\cdots j_l}dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_l}$ と座標近傍 $(U,x_1,\dots,x_m)$ 上でかけている場合,

$\omega\wedge\eta = \displaystyle\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le m}\sum_{1\le j_1<\cdots<j_l\le m} f_{i_1\cdots i_k}g_{j_1\cdots j_l}dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\wedge dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_l}$ となる.

定義 24 (外微分). M 上の k 次微分形式 ω について, 外微分 $d\omega$ を

$$\begin{aligned} d\omega(X_1,\dots,X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}X_i(\omega(X_1,\dots,\widehat{X_i},\dots,X_m)) \\ &\quad+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_1,\dots,\widehat{X_i},\dots,\widehat{X_j},\dots,X_m). \end{aligned}$$

とする. ここで $(X_1,\dots,X_{k+1})$ はベクトル場とし, $(X_1,\dots,\widehat{X_i},\dots,X_m)$ は $(X_1,\dots,X_{i-1},X_{i+1},\dots,X_m)$ を意味する. $\omega=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le m} f_{i_1\cdots i_k}dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}$ と座標近傍 $(U,x_1,\dots,x_m)$ 上でかけている場合,

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le m} df_{i_1\cdots i_k}dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k} \\ &= \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le m}\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f_{i_1\cdots i_k}}{\partial x_j}dx_j\right)\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k} \end{aligned}$$ となる.

定義 25 (引き戻し). $\varphi: M\to N$ を C^∞ 写像とする. N 上の l 次微分形式 η について, η の φ による引き戻し $\varphi^*\eta$ を

$$(\varphi^*\eta)_p(X_p) := \eta_{\varphi(p)}((d\varphi)_pX_p) \quad (\forall p\in M, \forall X\in T_pM)$$

と定める. これは M 上の l 次微分形式となる. M の座標近傍 $(U,x_1,\dots,x_m)$, N の座標近傍 $(V,y_1,\dots,y_n)$ に関して, $\eta=\sum_{1\le j_1<\cdots<j_l\le m} g_{j_1\cdots j_l}dy_{j_1}\wedge\cdots\wedge dy_{j_l}$ とかけている場合,

$$\varphi^*\eta := \sum_{1\le j_1<\cdots<j_l\le m}(g_{j_1\cdots j_l}\circ\varphi)\left(\sum_{i_1=1}^{m}\frac{\partial y_{j_1}}{\partial x_{i_1}}dx_{i_1}\right)\wedge\cdots\wedge\left(\sum_{i_l=1}^{m}\frac{\partial dy_{j_l}}{\partial x_{i_l}}dx_{i_l}\right)$$ となる.

例 26. $\omega=f_1dx_1+f_2dx_2$, $\eta=g_1dx_1+g_2dx_2$, $\varphi(z_1,z_2)=(\varphi_1(z_1,z_2),\varphi_2(z_1,z_2))$ とすると外積,

外微分, 引き戻しはそれぞれ次の通りとなる.

$$\omega\wedge\eta=(f_1dx_1+f_2dx_2)\wedge(g_1dx_1+g_2dx_2)=(f_1g_2)dx_1\wedge dx_2+(f_2g_1)dx_2\wedge dx_1=(f_1g_2-f_2g_1)dx_1\wedge dx_2.$$

$$d\omega=\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f_1}{\partial x_2}dx_2\right)\wedge dx_1+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}dx_2\right)\wedge dx_2=\left(-\frac{\partial f_1}{\partial x_2}+\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)dx_1\wedge dx_2.$$

$$\varphi^*\omega=f_1(\varphi(z))d\varphi_1+f_2(\varphi(z))d\varphi_2=f_1(\varphi(z))\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z_1}dz_1+\frac{\partial\varphi_1}{\partial z_2}dz_2\right)+f_2(\varphi(z))\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial z_1}dz_1+\frac{\partial\varphi_2}{\partial z_2}dz_2\right).$$

命題 27. ω を k 次微分形式, η を l 次微分形式, ζ を s 次微分形式とする. 次が成り立つ.

- $\omega\wedge\eta=(-1)^{kl}\eta\wedge\omega$, $\omega\wedge(\eta\wedge\zeta)=(\omega\wedge\eta)\wedge\zeta$.
- $\varphi^*(\omega\wedge\eta)=\varphi^*(\omega)\wedge\varphi^*(\eta)$.
- $d(\omega\wedge\eta)=(d\omega)\wedge\eta+(-1)^k\omega\wedge(d\eta)$.
- $d(d\omega)=0$, $d(\varphi^*\omega)=\varphi^*(d\omega)$.

定義 28 (Lie 微分)**.** X をベクトル場とし, ω を k 次微分形式とする.

$$(L_X\omega)(X_1,\dots,X_k):=X(\omega(X_1,\dots,X_k))-\sum_{i=1}^{k}\omega(X_1,\dots,[X,X_i],\dots,X_k)$$

と定義する. $L_X\omega$ を ω の X による Lie 微分という. このとき次が成り立つ

1. $L_X\omega$ は k 次微分形式である.
2. $\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ を X の 1 パラメーター変換群とするとき, $L_X\omega=\lim_{t\to 0}\frac{\varphi_t^*\omega-\omega}{t}$.
3. $L_XL_Y-L_YL_X=L_{[X,Y]}$.
4. $L_X(\omega\wedge\eta)=L_X(\omega)\wedge\eta+\omega\wedge L_X(\eta)$
5. $dL_X=L_Xd$.

定義 29 (内部積)**.** X をベクトル場とし, ω を k 次微分形式とする.

$$(i_X\omega)(X_1,\dots,X_{k-1}):=\omega(X,X_1,\dots,X_{k-1})$$

と定義する. $i_X\omega$ を ω と X の内部積という. このとき次が成り立つ.

1. $i_X\omega$ は $k-1$ 次微分形式. .
2. ω を k 次微分形式とするとき, $i_X(\omega\wedge\eta)=i_X(\omega)\wedge\eta+(-1)^k\omega\wedge i_X(\eta)$.
3. $i_{[X,Y]}=L_Xi_Y-i_YL_X$.
4. Cartan の公式 $L_X=i_Xd+di_X$.

9　1 の分割と多様体上の積分

定理 30. $p \in M$ と p の開近傍 U について, ある p の開近傍 V と C^∞ 級関数 $\rho : M \to \mathbb{R}$ があって $\overline{V} \subset U$ かつつぎを満たす.

$$\begin{cases} \rho(q) = 1 & q \in \overline{V} \\ 0 \leqq \rho(q) < 1 & q \in U \setminus \overline{V} \\ \rho(q) = 0 & q \in M \setminus U \end{cases}$$

特に ρ の台 $\mathrm{Supp}(\rho) := \overline{\{q \in M | \rho(q) \neq 0\}}$ とするとき, $\mathrm{Supp}(\rho) \subset U$ となる.

定理 31 (1 の分割)**.** M が第二可算であると仮定する. 任意の M の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ についてある可算個の C^∞ 級関数 $\rho_j : M \to \mathbb{R}(j \in \mathbb{N})$ があって次が成り立つ

1. $\{\mathrm{Supp}(\rho_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ は M の被覆であり, $p \in M$ についてある p の開近傍 U をとれば $U \cap \mathrm{Supp}(\rho_j) \neq \varnothing$ なる j は有限個になる.(局所有限な被覆という.)
2. 任意の $j \in \mathbb{N}$ についてある $\alpha_j \in A$ があって $\mathrm{Supp}(\rho_j) \subset U_{\alpha_j}$ となる. ($\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ の細分という.)
3. $0 \leq \rho_j \leq 1$ かつ $\sum_{j \in \mathbb{N}} \rho_j \equiv 1$.

この $\{\rho_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ を$\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ に従属する 1 の分割という.

補足 32. 上は σ コンパクトで成り立つ定理である.(第二可算な多様体は σ コンパクトであるらしい.) ただ σ コンパクトは応用上で使うか怪しいし, 多様体に第二可算を仮定することが多いので, ここでは第二可算として主張を述べた.[7]要するに 1 の分割は取れると思って良い.

定義 33. $(U, \varphi) = (U, x_1, \ldots, x_m)$ を座標近傍とし, U 上の m 次微分形式を $\omega = f(x_1, \ldots, x_m) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m$ とする. $\varphi(U)$ が正方形領域 $V := [-a, a]^m$ に含まれるとき, ω の U 上の積分を

$$\int_U \omega := \int_{[-a,a]^m} f(x_1, \ldots, x_m) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m \text{で定義する.}$$

定義 34.

- $(U, x_1, \ldots, x_m)$, $(V, y_1, \ldots, y_m)$ を $U \cap V \neq \phi$ となる M の座標近傍とする. $(U, x_1, \ldots, x_m)$ と $(V, y_1, \ldots, y_m)$ が同じ向きであるとは, $U \cap V$ 上で

$$\frac{\partial(y_1, \ldots, y_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_m)} := \det\left(\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right)_{1 \leq i,j \leq m}\right) > 0 \text{ となることとする.}$$

- M が向きづけ可能であるとは, M の座標近傍系 $\{(U_\alpha, x_1^\alpha, \ldots, x_m^\alpha)\}$ であって, 同じ向きになるものが存在することとする.

[7]「トゥー 多様体」では多様体に第二可算を仮定している.

定理 **35.** M が向きづけ可能なコンパクト m 次元多様体とし, ω を m 次微分形式とする. このとき同じ向きになる M の座標近傍系 $U_1, \ldots, U_N$ とそれに従属する 1 の分割 $\rho_1, \ldots, \rho_N$ があって, ω の M 上の積分を

$$\int_M \omega := \sum_{j=1}^{N} \int_M \rho_j \omega$$

で定義する. この積分の値は実数値であり, 1 の分割や近傍系の取り方によらない.

補足 **36.** $\rho_j \omega$ は定義 33 の仮定を満たすため上のように積分が定義できる. M がコンパクトでない場合でも 1 の分割が取れれば積分は定義できるが, 有限の値になるかはわからない.

10　ストークスの定理

以下の内容は「坪井俊 著 幾何学 3 微分形式」を参考にした.

定義 **37.** M を第二可算ハウスドルフ空間とする. 次の条件が成り立つとき M は m 次元境界つき (C^∞ 級) 多様体と呼ばれる.

1. M の開被覆 $M = \cup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ と像への同相写像

$$\varphi_\lambda : U_\lambda \to \mathbb{H}^n := \{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m | x_1 \geqq 0\} \text{ が存在する.}$$

2. $U_\lambda \cap U_\mu \neq \phi$ なる $\lambda, \mu \in \Lambda$ について $\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1} : \varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu) \to \varphi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$ は C^∞ 級写像である

$\partial M := \cup_{\lambda \in \Lambda} \varphi_\lambda^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}) \subset$ を M の境界と呼ぶ.

補足 **38.** M の境界 ∂M は $m-1$ 次元多様体となる. また M が向きづけ可能であるとき, ∂M には座標近傍系 $\{(U_\lambda, x_2^\lambda, \ldots, x_m^\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ によって向きが入る.

定理 **39.** M が向きづけ可能なコンパクト m 次元境界つき多様体とし, η を $m-1$ 次微分形式とするとき, 次が成り立つ.

$$\int_M d\eta = \int_{\partial M} \eta$$

ストークスの定理は境界がない多様体 (つまり普通の意味での”多様体”) について述べると次のとおりである. 「M が向きづけ可能なコンパクト m 次元多様体とし, η を $m-1$ 次微分形式とするとき, $\int_M d\eta = 0$ となる.」ストークスの定理は研究でも応用でも使われる定理である.

11　de Rham コホモロジー

以下の内容は「トゥー 多様体」を参考にした.

定義 40 (de Rham コホモロジー (ドラーム・コホモロジー))**.** M を多様体とし k を 0 以上の整数とし, ω を k 次微分形式とする.

- $d\omega = 0$ なる微分形式を閉形式という. k 次微分形式で閉形式であるものからなるベクトル空間を $Z^k(M)$ と書く.
- ある $k-1$ 次微分形式 η があって $\omega = d\eta$ とかけるとき, ω は完全形式と呼ばれる. k 次微分形式で完全形式であるものからなるベクトル空間を $B^k(M)$ と書く. このとき $B^k(M) \subset Z^k(M)$ である. つまり完全形式は閉形式である.
- $H^k_{DR}(M) := Z^k(M)/B^k(M)$ とし, U の k 次 de Rham コホモロジーという

補足 41. $d \circ d = 0$ なので完全形式ならば閉形式である. ド・ラームコホモロジー群は閉形式と完全形式のずれを記述している群である.

定義 42 (完全系列)**.** ベクトル束の準同型の系列

$$A_0 \xrightarrow{f_0} A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} A_n$$

を考える. $f_i \circ f_{i-1}$ が $i = 1, \ldots, n-1$ で成り立つとき, この系列はコチェイン複体 (cochain complex) と呼ばれる. また上のコチェイン複体について

$$H^k := \frac{\mathrm{Ker}(f_k : A_k \to A_{k+1})}{\mathrm{Im}(f_{k-1} : A_{k-1} \to A_k)}$$

を k 次のコホモロジー群という

補足 43. M を多様体とし k 次微分形式の集合を $\Omega^k(M)$ とするとき,

$$0 \to \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^m(M) \xrightarrow{d} 0$$

はコチェイン複体となる. これをド・ラーム複体という. この複体のコホモロジーは

$$H^k_{DR}(M) := \frac{\ker(d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M))}{\mathrm{Im}(d : \Omega^{k-1}(M) \to \Omega^k(M))}$$

となり, これは k 次のド・ラームコホモロジー群に等しい.

定義 44 (完全系列)**.** A, B, C をベクトル空間とし

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

となるベクトル束の準同型の系列 (sequence) を考える. この系列が完全 (exact) であるとは $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} g$ となることとする. このとき

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

とかき短完全列 (short exact sequence) と呼ばれる.
また系列

$$A_0 \xrightarrow{f_0} A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} A_n$$

が完全 (exact) であるとは, $\mathrm{Ker} f_i = \mathrm{Im} f_{i-1}$ が $i = 1, \ldots, n-1$ で成り立つこととする.

定理 45 (Tu Prop 26.2)**.** M を多様体とし U, V を M の開被覆とする．このとき 0 以上の整数 k について

$$0 \to \Omega^k(M) \xrightarrow{i} \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) \xrightarrow{j} \Omega^k(U \cap V) \to 0$$

は完全である. ここで $i(\omega) = (\omega|_U, \omega|_V)$ とし, $j(\omega_U, \omega_V) = \omega_U - \omega_V$ とする.

これと完全系列とコチェイン複体の一般論 ([Tu 25.4] 参照) により次を得る.

定理 46 (Mayer-Vietoris sequence)**.** M を多様体とし U, V を M の開被覆とする．このとき

$$\cdots \longrightarrow H^k(M) \longrightarrow H^k(U) \oplus H^k(V) \longrightarrow H^k(U \cap V) \longrightarrow H^{k+1}(X) \longrightarrow \cdots$$

は完全である.

注意 47. トポロジーでならうホモロジーの Mayer-Vietoris 系列とは向きが逆になっていることに注意すること!

定義 48 (ホモトピック, ホモトピー同値)**.** M, N を多様体とする.

- C^∞ 級写像 $f, g : M \to N$ がホモトピック (homotopic) であるとはある C^∞ 写像 $F : M \times \mathbb{R} \to N$ があって $F(x, 0) = f$ かつ $F(x, 1) = g$ を満たすこと. このとき $f \sim g$ とかく.
- C^∞ 級写像 $f : M \to N$ がホモトピー同値 (homotopy equivalence) であるとは, ある C^∞ 級写像 $g : N \to M$ があって $g \circ f \sim id_M$ かつ $f \circ g \sim id_N$ となること. このとき M は N とホモトピー同値であるという.
- M が可縮 (contractible) であるとは, M が 1 点とホモトピー同値であることとする.

$f : M \to N$ が同型写像ならばホモトピー同値である. 逆は成り立たない. 例えば包含写像 $S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ はホモトピー同値であるが同型ではない.

定理 49 (Tu Thm 27.10)**.** M, N を多様体とする. C^∞ 級写像 $f, g : M \to N$ がホモトピックならば, k 次ドラーム・コホモロジーの間の写像である f^* と g^* は同じ写像である.

系 **50** (Tu Cor 27.11). M, N を多様体とする. C^∞ 級写像 $f : M \to N$ がホモトピー同値ならば,

$$f^* : H^k_{DR}(M) \to H^k_{DR}(N)$$

は同型写像である.

系 **51** (Tu Cor 27.13 Poincare Lemma). M が可縮ならば, 1 以上の整数 k について $H^k_{DR}(M) = 0$. 特に 1 以上の整数 k について $H^k_{DR}(\mathbb{R}^m) = 0$.

他に「トゥー 多様体」にはないが有用な定理を述べておく. 以下の内容は「坪井俊 著 幾何学 3 微分形式」を参考にした.

定理 **52** (坪井 定理 3.3.7 deRham の定理). M を多様体とき

$$H^k_{DR}(M) \to \mathrm{Hom}(H_k(M, \mathbb{Z}), \mathbb{R})$$

はベクトル空間の同型写像である. ここで $H_k(M, \mathbb{Z})$ は M のホモロジー群である.

定理 **53** (坪井 定理 3.4.11). M を境界を持たない m 次元コンパクト連結多様体とする. $H^m_{DR}(X)$ が $\mathbb{R}$ であることは M が向きづけ可能であることと同値である. また $H^m_{DR}(X)$ が 0 であることは M が向きづけ不可能であることと同値である.