前回 A：が正則（逆行列 A^{-1} をもつ）

$\iff \det A \neq 0$

今回

$\det(AB) = (\det A) \times (\det B)$

を2通りの方法で示す。

教科書 命題

定理3.3.4

$$\begin{vmatrix} A & B \\ O & C \end{vmatrix} = |A| \times |C|$$

（$|\ |$：行列式）

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 1 \times 3$

ここで A, B, C, O は n次正方行列（Oはゼロ行列）

証

$D = \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}$ とおくと $D_{1j} = D_{2j} = \cdots = D_{nj} = 0$

$(n+1 \leq j \leq 2n)$

$$\det D \underset{\text{定義}}{=} \sum_{\sigma \in S_{2n}} \mathrm{sgn}(\sigma) D_{1\sigma(1)} D_{2\sigma(2)} \cdots D_{n\sigma(n)} D_{n+1\,\sigma(n+1)} \cdots D_{2n\,\sigma(2n)}$$

$$= \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \text{ について} \\ 1 \leq \sigma(i) \leq n \\ \text{となる } \sigma \in S_{2n}}} \mathrm{sgn}(\sigma) D_{1\sigma(1)} \cdots D_{2n\,\sigma(2n)} + \sum_{\substack{\sigma \in S_{2n} \\ \text{それ以外}}} \underbrace{D_{1\sigma(1)} \cdots D_{n\sigma(n)}}_{0} D_{n+1\,\sigma(n+1)} \cdots D_{2n\,\sigma(2n)}$$

$$= \sum_{\substack{1 \le i \le n \text{ について} \\ 1 \le \sigma(i) \le n}} \operatorname{sgn}(\sigma) D_{1\sigma(1)} \cdots D_{n\sigma(n)} D_{n+1\,\sigma(n+1)} \cdots D_{2n\,\sigma(2n)}$$

$$\sigma = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 \cdots & n & n+1 & \cdots & 2n \\ k_1 & \cdots & k_n & k_{n+1} & \cdots & k_{2n} \end{array}\right)$$

σは$1 \sim n$のものを$1 \sim n$にうつし、$n+1 \sim 2n$を$n+1 \sim 2n$にうつす

$\Rightarrow \sigma = \sigma_1 \sigma_2$. σ_1: $1 \sim n$の置換, σ_2: $n+1 \sim 2n$の置換 とおける

$$= \sum_{\sigma = \sigma_1\sigma_2} \left(\operatorname{sgn}\sigma_1 D_{1\sigma_1(1)} \cdots D_{n\sigma_1(n)}\right)\left(\operatorname{sgn}\sigma_2 D_{n+1\,\sigma_2(n+1)} \cdots D_{2n\,\sigma_2(2n)}\right)$$

$$= \det A \times \det C$$

$\det(AB) = (\det A) \times (\det B)$ の証明 「もう1つ

◦ $\begin{vmatrix} A & -E_n \\ O & B \end{vmatrix}$ を2通りの方法で計算する
(${E_n}$は単位行列) 」

① さっきの命題をつかうと $(\det A) \times (\det B)$

② $\begin{pmatrix} A & -E_n \\ O & B \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} A & -E_n \\ AB & O \end{pmatrix}$

となるように行基本変形をする

第 $n+1$ 行に $\left\{\begin{array}{l}\text{第 1 行の } b_{11} \text{ 倍,} \\ \text{第 2 行の } b_{12} \text{ 倍} \\ \vdots \\ \text{第 } n \text{ 行の } b_{1n} \text{ 倍}\end{array}\right.$ をたす。

これを第 $n+2, \ldots, 2n$ 行にもする。

n回行の入れかえ

$$\det\begin{pmatrix} A & -E_n \\ O & B \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A & -E_n \\ AB & O \end{pmatrix} = (-1)^n \det\begin{pmatrix} AB & O \\ A & -E_n \end{pmatrix}$$

$$\underset{(\text{命題})}{=} (-1)^n \det(AB)\det(-E_n) = \det AB$$

$\det(-E_n) = (-1)^n$

2つ目の方法

定理 F: 行ベクトル $x_1 = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n})$
$x_2 = (x_{21}, x_{22} \cdots x_{2n})$
$\vdots$
$x_n = (x_{n1}, \ldots\ x_{nn})$ について

実数 $F\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ を対応させる関数とする

$$F : \{\text{行ベクトル}\}^{\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x_1, \ldots\ x_n \longmapsto F\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Fが次をみたすとする

① $\sigma \in S_n$ について

$$F\begin{pmatrix} x_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ x_{\sigma(n)} \end{pmatrix} = \mathrm{sgn}(\sigma)\, F\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

(交代性)

② α, β 実数, a_i, b_i 行ベクトルについて

$$F\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \alpha a_i + \beta b_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \alpha F\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \beta F\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

(多重線型性)

このとき $F\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ となる

ここで $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0 \ldots 0)$, …, $e_n = (0, \ldots, 0, 1)$ とする

これをみとめると $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ の証明は

[証] $F(X) = \det(AX)$ をかんがえる

するとFは交代性と多重線型性をみたす。

上の定理から $F(X) = \det(A \cdot E_n) \cdot \det X$

$= \det(A) \times \det X$

$\therefore$

補足

本によってはdet$A$の定義を

$$\begin{cases} \cdot\ \text{交代性} \\ \cdot\ \text{多重線型性} \\ \cdot\ \det(E_n)=1 \end{cases}$$

なるものとして定義することもある

（足立先生の本）

3.4 余因子行列とクラメルの公式

3.4.1 余因子行列

$\boxed{\text{定義}}$ n次正方行列 $A=(a_{ij})$ について

第i行と第j列をとりのぞいた行列

$$\tilde{A}_{ij} = \begin{array}{c} \\ \boxed{i\text{行}} \end{array} \begin{array}{c} \hphantom{a_{11}\ a_{12}\ \cdots\ a_{1j-1}}\ j\text{列} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \cdots & & & \cdots & \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \cdots & & & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & & & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$$

とする

$\boxed{\text{例}}$ $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$ $\hat{A}_{11}=(a_{22})$ $\hat{A}_{12}=(a_{21})$ $\hat{A}_{21}=(a_{12})$ $\hat{A}_{22}=(a_{11})$

$\boxed{\text{例}}$ $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$ $\hat{A}_{11}=\begin{pmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$ $\hat{A}_{22}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{31}&a_{33}\end{pmatrix}$

$\boxed{\text{定義}}$ 余因子行列

$A=(a_{ij})$について 余因子行列$\tilde{A}$を

$\tilde{A}$のij成分を$(-1)^{i+j}\det\hat{A}_{ji}$とする

$\boxed{\text{例}}$ $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$

$\tilde{A}$の$(1,1)$成分$=(-1)^{1+1}\det\hat{A}_{11}=a_{22}$

$\tilde{A}$の$(1,2)$ $=(-1)^{1+2}\det\hat{A}_{21}=-a_{12}$

$\tilde{A}$の$(2,1)$ $=(-1)^{2+1}\det\hat{A}_{12}=-a_{21}$

$\tilde{A}$の$(2,2)$ $=(-1)^{2+2}\det\hat{A}_{22}=a_{11}$

$\tilde{A}=\begin{pmatrix}a_{22}&-a_{21}\\-a_{12}&a_{11}\end{pmatrix}$

つまり $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ なら $\tilde{A}=\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$

$\left(= (\det A)\, A^{-1}\right)$

余因子行列

≒ 逆行列となる

$\boxed{\text{定理}}$ Aをn次正方行列とする。

① $1\leqq i\leqq n$, $1\leqq j\leqq n$ なる

i, j について

$$\det(A) = (-1)^{1+j} a_{1j}\det(\hat{A}_{1j}) + (-1)^{2+j}\det(\hat{A}_{2j}) + \cdots + (-1)^{n+j}\det\hat{A}_{nj}$$

$$= (-1)^{2+1} a_{21}\det\hat{A}_{21} + (-1)^{2+2}\det(\hat{A}_{22}) + \cdots + (-1)^{2+n}\det\hat{A}_{2n}$$

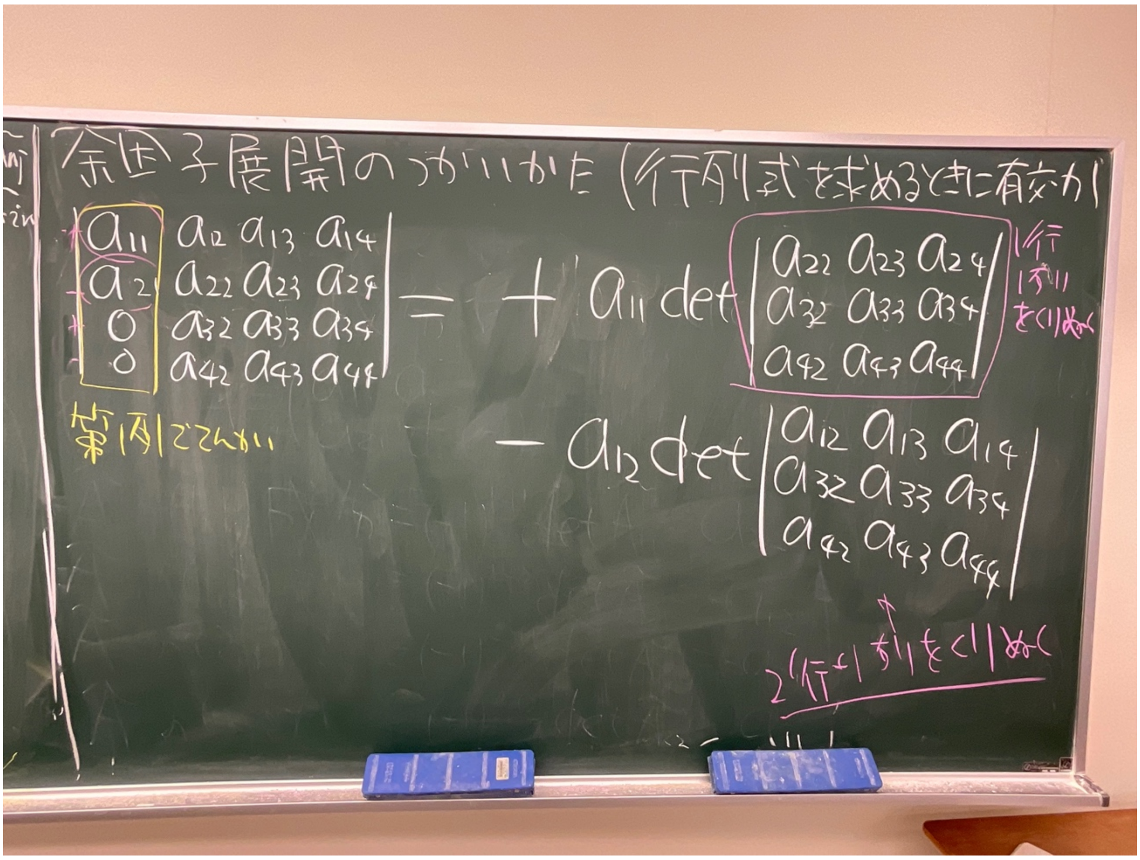
(ここで $\hat{A}_{ij}$ は(Aから) i行とj列をとりのぞいた行列)

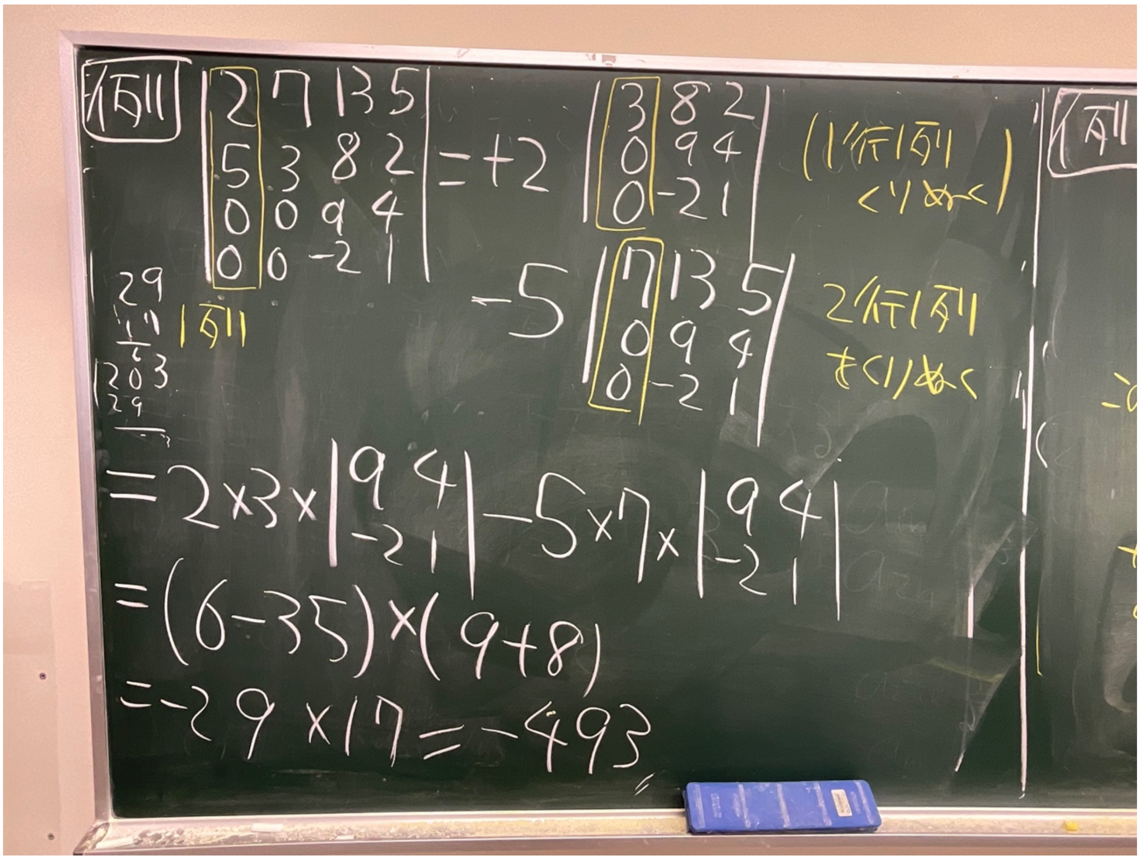
この展開を余因子展開という

② $A\cdot\tilde{A}=\hat{A}\cdot A=(\det A)E_n$

とくに $\det A\neq 0$ なら $A^{-1}=\dfrac{\hat{A}}{\det A}$

(余因子行列は逆行列みたいなもの)


余因子展開のつかいかた（行列式を求めるときに有効か
$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = +a_{11}\det\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$
1行1列をくりぬく
$-a_{12}\det\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$
2行1列をくりぬく
第1列でてんかい


例
$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 13 & 5 \\ 5 & 3 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = +2\begin{vmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 0 & 9 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$
（1行1列くりぬく）
$-5\begin{vmatrix} 7 & 13 & 5 \\ 0 & 9 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$
2行1列をくりぬく
1列
$= 2\times3\times\begin{vmatrix} 9 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 5\times7\times\begin{vmatrix} 9 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$
$= (6-35)\times(9+8)$
$= -29\times17 = -493$

例

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = +3 \begin{vmatrix} 6 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}$$

この列で展開

$$= 18 \begin{vmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} - 10 \begin{vmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}$$

サラスの公式

$$= 8 \times (7 \times 2 \times (-6) - 1 \times 3 \times (-6))$$

$$= 8 \times (-6) \times 11 = -528$$

ちなみに

$$\begin{vmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 3 & 2 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

行のいれかえ

$$= -6 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = -6 \times 11$$

余因子展開