前回 行列式 $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}\,\sigma \, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$

例 $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} =$ (サラスの公式)

公式 (定理8.2)

① $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

② $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & & \vdots \\ O & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$

③ $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ b_{21}+c_{21} & \cdots & b_{2n}+c_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ c_{21} & \cdots & c_{2n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

(定理8.3)

④-⑥ 行基本変形と行列式の変化

1つの行c倍 ⟷ 行列式 c倍

行のいれかえ ⟷ 行列式 −1倍

1つの行に ある行のc倍足す ⟷ 行列式は不変

(①-⑥をつかって行列式をもとめた)

証 ①の証明　$A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}$ とする。仮定から $a_{i1}=0$ $(2\le i\le n)$

$$\det A \underset{\text{定義}}{=} \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}\, a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$\underset{n\text{次置換}}{=} \sum_{\substack{\sigma\in S_n\\ \sigma(1)=1}} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)} + \underbrace{\sum_{\substack{\sigma\in S_n\\ \sigma(1)\neq 1}} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}}_{=0}$$

($\sigma(i)=1$ なる i について $a_{i1}=0$ より)

$$= \sum_{\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ 1 & k_2 & \cdots & k_n\end{pmatrix}\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{11}\, a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}$$

2〜nの置換

$\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$ となる

$$= a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

②の証明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ & a_{22} & & \vdots\\ O & & \ddots & \\ & & & a_{nn}\end{vmatrix} \underset{①}{=} a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ & \ddots & \vdots\\ O & & a_{nn}\end{vmatrix} \underset{①}{=} a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3n}\\ & \ddots & \vdots\\ O & & a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$= \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

③ (左) $\underset{\text{定義}}{=} \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}\,\sigma\; a_{1\sigma(1)}\cdots(b_{i\sigma(i)}+c_{i\sigma(i)})\cdots a_{n\sigma(n)}$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}\,\sigma\; a_{1\sigma(1)}\cdots b_{i\sigma(i)}\cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$+ \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}\,\sigma\; a_{1\sigma(1)}\cdots c_{i\sigma(i)}\cdots a_{n\sigma(n)} = \text{右}$$

定理 89(2) A, B n次正方行列として

$$\det(AB) = (\det A)\cdot(\det B)$$

今日と来週かかる

この定理からわかること

$\boxed{1}$ 1つの行を c 倍すると行列式は c 倍される

証 第 i 行を c 倍することと

左から行列

$$\begin{array}{c} \\ i \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & c & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

をかけるのは同じ

この行列を F_i^c とおく（第5回でやった）

よって $\det(F_i^c A) \underset{\text{定理}}{=} (\det F_i^c) \times (\det A)$

② $=$ $c \det A$

$\boxed{2}$ 行をいれかえると行列式は -1 倍される

証 第 i 行と第 j 行をかえることは

左から

$$G_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

をかけることと同じ

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(G_{ij})_{kl} = \begin{cases} 1 & k = l,\ k \neq i \text{ or } k \neq j \\ 1 & (k, l) = (i, j), (j, i) \\ 0 & \text{他} \end{cases}$$

よって $\det(G_{ij}A) \underset{\text{定理}}{=} (\det G_{ij})(\det A)$ より

$\det G_{ij} = -1$ を示せばよい

簡単のため $i=1, j=2$ とすると, $3 \leq k \leq n$ について $G_{kl} = \begin{cases} 1 & k=l \\ 0 & k \neq l \end{cases}$

$$\det G_{12} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \, G_{1\sigma(1)} G_{2\sigma(2)} G_{3\sigma(3)} \cdots G_{n\sigma(n)}$$

$$= \underbrace{\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} G_{12} G_{21}}_{-1} + \underbrace{\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} G_{11} G_{22}}_{0} = -1$$

別

$$|G_{12}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & O \\ & & 1 & \\ O & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$\boxed{3}$ ある行に別の行のc倍をたすと行列式不変

証 第i行に第j行のc倍をたすことは

$$H^c_{ij} = \begin{array}{c} \\ i \\ j \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & O \\ & \ddots & & \\ & c & \ddots & \\ O & & & 1 \end{pmatrix}, \quad (H^c_{ij})_{kl} = \begin{cases} 1 & k=l \\ c & (k,l)=(j,i) \\ 0 & \text{他} \end{cases}$$

を左からかけることと同じ

$$\det H^c_{ij} = 1 \quad \left(\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \\ O & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdots a_{nn} \text{ より} \right)$$

$$\det(H^c_{ij}A) \underset{\text{定理}}{=} (\det H^c_{ij}) \times (\det A) = \det A \;//$$

$\boxed{4}$ $\boxed{\text{定理90}}$ ① $\det A \neq 0$ は Aが正則と同値

② $AB = E_n$ (E_n 単位行列) なら Aは正則で $B = A^{-1}$

(自動的に $BA = E_n$ になる)

補足 (n次正方) Aが正則とはある行列Cがあって $AC = CA = E_n$ なること

定理90から $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 正則, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 正則でない。

(行列式≠0) とかがわかる (行列式0)

$\boxed{\text{証}}$ ① Aが正則 $\Longrightarrow \det A \neq 0$ について

Aが正則よりあるCで $AC = CA = E_n$.

よって $\det(AC) = \det E_n = \det\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = 1$

$\boxed{\text{定理}}$ → ‖

$(\det A) \times (\det C)$ よって $\det A \neq 0$ ∎

$\boxed{\text{逆}}$ $\det A \neq 0 \Longrightarrow A$が正則

簡約化の存在定理 (第5回でやった命題) より

ある正則行列 $\underset{\sim}{R}$ があって RA が簡約行列になる

（F_i^c, G_{ij}, H_{ij}^c の積）

$B = RA$ とすると $\det B \underset{(\text{定理})}{=} (\det R) \times (\det A) \neq 0$

すると $B = E_n$ となる

(なぜなら $B \neq E_n$ なら $B_{1n} = B_{2n} = \cdots = B_{nn} = 0$

しかしそのとき $\underline{\det B = 0}$ となり矛盾する)

かんやく

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって $A = R^{-1}$ 正則

(R は正則より) //

② $AB = E_n \Rightarrow A$ は正則, $B = A^{-1}$ の証明

$AB = E_n$ より $(\det A)\cdot\det B \underset{(\text{定理})}{=} \det E_n = 1$

よって $\det A \neq 0$

よって①から A は正則, 逆行列 A^{-1} をもつ

$$B \underset{A^{-1}A = E_n}{=} (A^{-1}A)\cdot B \underset{\text{分配法則}}{=} A^{-1}(AB) \underset{AB = E_n}{=} A^{-1}$$

よって $B = A^{-1}$ //

(det 使わないとできない定理)

来週に $\det(AB)=\det A\times\det B$ を示すことにして

定理8.9.1 $\det({}^tA)=(\det A)$

(ここで $({}^tA)_{ij}=A_{ji}$ 転置行列)

証 $(\det {}^tA) \underset{\text{定義}}{=} \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma\,({}^tA)_{1\sigma(1)}\cdots({}^tA)_{n\sigma(n)}$

$\underset{{}^tA\text{の定義}}{=} \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma\, A_{\sigma(1)1}\cdots A_{\sigma(n)n}$

ここで $\sigma\in S_n$ について $A_{\sigma(1)1}\cdots A_{n\sigma(n)}=A_{\sigma^{-1}(1)1}\cdots A_{\sigma^{-1}(n)n}$

なぜなら $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n\end{pmatrix}$ $\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}k_1 & \cdots & k_n\\ 1 & \cdots & n\end{pmatrix}$ より

$A_{\sigma(1)1}\cdots A_{\sigma(n)n} = A_{k_1 1}\cdots A_{k_n n} = A_{k_1\sigma^{-1}(k_1)}\cdots A_{k_n\sigma^{-1}(k_n)}$

$\underset{(k_1\sim k_n\text{は}1\sim n\text{をまわる})}{=} A_{1\sigma^{-1}(1)}\cdots A_{n\sigma^{-1}(n)}$ //

よって (上の式) $= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma\, A_{1\sigma^{-1}(1)}\cdots A_{n\sigma^{-1}(n)}$

$\underset{(\operatorname{sgn}\sigma\,=\,\operatorname{sgn}\sigma^{-1})}{=} \sum_{\sigma^{-1}\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma^{-1} A_{1\sigma^{-1}(1)}\cdots A_{n\sigma^{-1}(n)}$

$=\det A$ //

系

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{12} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{1n} & \cdots & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

$$\left|\begin{array}{c|ccc} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & \cdots & & a_{nn} \end{array}\right| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(転置行列をとる)