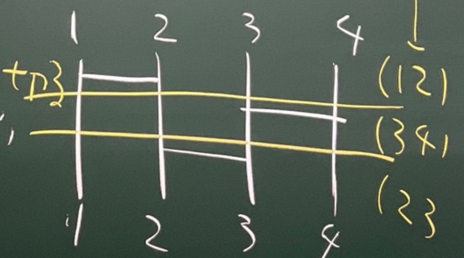
来週(6/5)に演習(13:30~15:00)

$\boxed{\text{前回}}$ 置換 "=" あみだくじ

$\{1,\dots,n\}$から$\{1,\dots,n\}$への並びかえの規則

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ "=" }$$



$1 \to 3$　$3 \to 4$

$2 \to 1$　$4 \to 2$

$\sigma = \underbrace{(23)(34)(12)}_{3つ}$　$\mathrm{sgn}\,\sigma = -1$ $(-1)^3 =$

3.2 行列式

$\boxed{\text{定義}}$ n次正方行列 $A=(a_{ij})$ について

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$(S_n = \{\sigma : \{1,\dots,n\}$から$\{1,\dots,n\}$への置換全体$\})$　$n!$コある　$n=5$ 120コ

をAの行列式という

Aの行列式は $\det(A)$, $|A|$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ とかく

補足　この定義からdetを計算することは
$n=2,3$ぐらいしかない。

例　$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$について $\det A = ad-bc$,

証　$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$とする $\begin{pmatrix}a=a_{11} & b=a_{12}\\ c=a_{21} & d=a_{22}\end{pmatrix}$

$S_2=\{\{1,2\}\to\{1,2\}$の置換全体$\}$

$=\{\varepsilon_2, (1\,2)\}$

$\mathrm{sgn}\,\varepsilon_2 = 1$

$\mathrm{sgn}(1\,2) = -1$ $(-1)^1$

(ε_2 恒等置換
(なにもしないちかん))

$\tau=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}=\varepsilon_2$, $\sigma=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}=(1\,2)$とすると

$1\to1$, $2\to2$　　　$1\to2$, $2\to1$

$$\det A = \underbrace{\mathrm{sgn}\,\tau}_{1}\,\underbrace{a_{1\tau(1)}}_{a_{11}}\,\underbrace{a_{2\tau(2)}}_{a_{22}} + \underbrace{\mathrm{sgn}\,\sigma}_{-1}\,\underbrace{a_{1\sigma(1)}}_{a_{12}}\,\underbrace{a_{2\sigma(2)}}_{a_{21}}$$

$$= a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$$= ad-bc$$

$$\det\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=ad-bc$$

$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$　$+ad$　$-bc$

例1.2 $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ のとき

サラスの公式

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$-$ $+$ $+$ $+$

右下にいくのを+

左下にいくのを−

$$\det A = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg$$

証 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ とする

$S_3 = \{\{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$ の置換$\}$ $n! = 3! = 6$コ

$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 1&2&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 2&1&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 3&2&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 1&3&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 2&3&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 3&1&2 \end{pmatrix} \right\}$

σ						
sgn	1	-1	-1	-1	1	1
$a_{1\sigma(1)}$	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{11}	a_{12}	a_{13}
$a_{2\sigma(2)}$	a_{22}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{23}	a_{21}
$a_{3\sigma(3)}$	a_{33}	a_{33}	a_{31}	a_{32}	a_{31}	a_{32}

$$\det(A) \underset{(定義)}{=} \sum_{\sigma \in S_3} \operatorname{sgn}\sigma \, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)}$$

$$= \operatorname{sgn}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix} a_{11}a_{22}a_{33} \quad + a_{11}a_{22}a_{33} \ (+aei)$$

$$+ \operatorname{sgn}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix} a_{12}a_{21}a_{33} \quad - a_{12}a_{21}a_{33} \ (-bdi)$$

$$+ \operatorname{sgn}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix} a_{13}a_{22}a_{31} \quad - a_{13}a_{22}a_{31} \ (-ceg)$$

$$+ \operatorname{sgn}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix} a_{11}a_{23}a_{32} \quad - a_{11}a_{23}a_{32} \ (-afh)$$

$$+ \operatorname{sgn}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix} a_{12}a_{23}a_{31} \quad + a_{12}a_{23}a_{31} \ (+bfg)$$

$$+ \operatorname{sgn}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix} a_{13}a_{21}a_{32} \quad + a_{13}a_{21}a_{32} \ (+cdh)$$

示したい定理 $\det(A) \neq 0 \iff A$が正則(A^{-1}をもつ)

$\boxed{A \to \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}}$ 答 対角化にもdetをつかう

困ること $\det(A)$は定義から計算しづらい

$\longrightarrow$ 行基本変形をつかえば楽になる

- ある行をc倍
- 行のいれかえ
- ある行に別の行のc倍をたす

3.2.2 行列式の計算方法

定理

① $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$n-1$

② $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots\ 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

③ $$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ b_{21}+c_{21} & \cdots & b_{2n}+c_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ c_{21} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

定理

① $$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ ca_{21} & \cdots & ca_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ある行をc倍すると行列式はc倍

② $$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行をいれかえると行列式は(−1)倍

③ $$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}+ca_{j1} & \cdots & a_{2n}+ca_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ある行に別の行のc倍たしても行列式は不変

つまり行列式は

行基本変形で（主に③）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

をつくって

右の定理①より $a_{11} \times \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ の形にしていく

$\boxed{例}$ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & -5 & 7 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ の行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & -5 & 7 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \underset{1行目\times 2をたす}{\overset{2行目に}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 15 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \underset{1行目\times 3をたす}{\overset{3行目に}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 15 \\ 0 & 11 & 11 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 15 \\ 0 & 11 & 11 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 15 \\ 11 & 11 \end{vmatrix}$$

$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

$$= 1 \times (1 \times 11 - 15 \times 11) = -154$$

ふつうにやると

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & -5 & 7 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times (-5) \times (-1) + 3 \times 7 \times (-3) + 4 \times (-5) \times (-3)$$

$$- 1 \times 7 \times 2 - 3 \times (-2) \times (-1) - 4 \times (-5) \times (-3)$$

$$= \cdots\cdots$$

例 $\begin{pmatrix} 2 & -4 & -5 & 3 \\ -6 & 13 & 14 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & -8 \\ 2 & -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ の行列式

（ふつうに計算すると 24この和をとる）

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & -5 & 3 \\ -6 & 13 & 14 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & -8 \\ 2 & -5 & 0 & 5 \end{vmatrix} \underset{\text{3行目いれかえ}}{\overset{\text{1行目と}}{=}} (-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 & -8 \\ -6 & 13 & 14 & 1 \\ 2 & -4 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{1行目×6をたす}}{\overset{\text{2行目に}}{=}} (-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & -47 \\ 2 & -4 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{4行目に1行目×(-2)をたす}}{\overset{\text{3行目に1行目×(-2)をたす}}{=}} (-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 & -8 \\ \boxed{0} & 1 & 2 & -47 \\ \boxed{0} & 0 & -1 & 19 \\ \boxed{0} & -1 & 4 & 21 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & -47 \\ 0 & -1 & 19 \\ -1 & 4 & 21 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{1行目をたす}}{\overset{\text{3行目に}}{=}} (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -47 \\ 0 & -1 & 19 \\ 0 & 6 & -26 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \times 1 \times \begin{vmatrix} -1 & 19 \\ 6 & -26 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \times (-1 \times (-26) - 19 \times 6)$$

$$= -1(26 - 114)$$

$$= 88$$

$\boxed{例}$

$$\begin{vmatrix} 0 & -3 & -6 & 15 \\ -2 & 5 & 14 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \\ 15 & 10 & 10 & -5 \end{vmatrix} \underset{\text{行列式はc倍される}}{\overset{\text{1行のc倍の}}{=}} (-3)\times 5 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -5 \\ -2 & 5 & 14 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{行列式は(-1)倍}}{\overset{\text{行をいれかえると}}{=}} 3\times 5 \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 & 5 \\ -2 & 5 & 14 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 3 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 3\times 5 \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & 10 & 14 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 11 & 8 & -16 \end{vmatrix}$$

2行目+1行目×2
4行目+1行目×(-3)

$$= 3\times 5\times \begin{vmatrix} -1 & 10 & 14 \\ 1 & 2 & -5 \\ 11 & 8 & -16 \end{vmatrix}$$

$$= 3\times 5\times \begin{vmatrix} -1 & 10 & 14 \\ 0 & 12 & 9 \\ 0 & 118 & 138 \end{vmatrix}$$

$$= 15\times(-1)\times \begin{vmatrix} 12 & 9 \\ 118 & 138 \end{vmatrix}$$

$$= -15\times(12\times 138 - 9\times 118)$$

$$= -15\times 594 = -8910$$

$594 \times 15 = 2970 + 594 = 8910$

$138 \times 12 = 276 + 138 = 1656$

$118 \times 9 = 1062$

$1656 - 1062 = 594$