前回 A: n次正方行列

Aが正則 ⟺ 逆行列 A^{-1} をもつ ($AA^{-1}=A^{-1}A=E_n$)

$\boxed{\text{定理}}_{60}$ Aが正則 ⟺ Aの行列式 detA が 0でない

証明してなかった

今学期の後半

・Aの行列式を定義する (2回つから)

・ 〃 を計算できるようにする

3. 行列式

3.1 置換

$\boxed{\text{定義}}$ {1,2,…,n}から{1,2,…,n}への1対1写像を置換といい σ と表す

つまり $k_1,\dots,k_n$ を相異なる1,2,…,nの数として

"1をk_1に2をk_2に…,nをk_nに変換させる"

規則を置換という

このとき $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$ とかき $\sigma(1)=k_1, \dots, \sigma(n)=k_n$ とかく。

$\boxed{\text{例1}}$

$$\sigma : \begin{array}{l} 1 \longrightarrow 2 \\ 2 \longrightarrow 3 \\ 3 \longrightarrow 1 \end{array}$$

1を2に
2を3に
3を1に
変換させる規則

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ とかく

$\boxed{\text{例2}}$

$$\begin{array}{l} 1 \longrightarrow 2 \\ 2 \longrightarrow 3 \\ 3 \longrightarrow 3 \end{array}$$

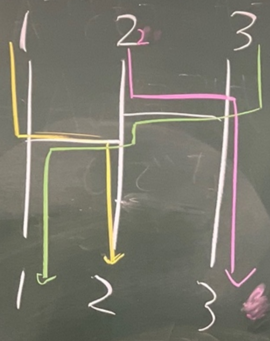
置換ではない
($k_2 = 3 = k_3$ より)

置換 "=" あみだくじでかけるもの

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} 1 \longrightarrow 2 \\ 2 \longrightarrow 3 \\ 3 \longrightarrow 1 \end{array}$$

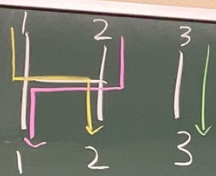
"＝"



$\boxed{\text{例}}$ $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

1を2に
2を1に
3を3に
変換させる規則

$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix} \longleftrightarrow$

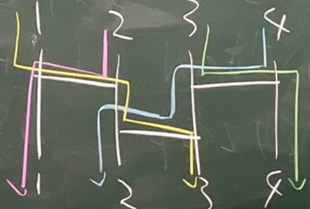


特に $\sigma(3)=3$ より

3に何も変換させてないので $\sigma=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$ ともかく

$\boxed{\text{例4}}$

$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix} \xleftrightarrow{\text{対応}}$



1を3に、3を4に 変換させる規則

2を1に、4を2に

$\boxed{\text{定義}}$ 置換 σ,τ について $\sigma\tau$ を

$\sigma(\tau(i))$ でさだめる

$i \longmapsto \tau(i) \longrightarrow \sigma(\tau(i))$

$\boxed{\text{例}}$ $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}$

$1\longrightarrow 4$
$2\longrightarrow 3$
$3\longrightarrow 1$
$4\longrightarrow 2$

$\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$

$1\longrightarrow 2$
$2\longrightarrow 3$
$3\longrightarrow 4$
$4\longrightarrow 1$

$\therefore \sigma\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}$

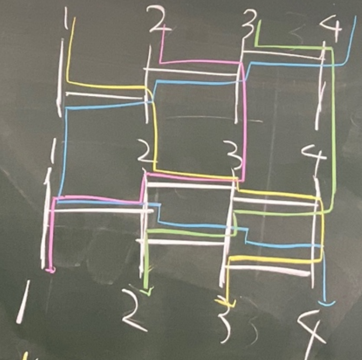
のとき $\sigma\tau$: $1\xrightarrow{\tau}2\xrightarrow{\sigma}3$, $3\xrightarrow{\tau}4\xrightarrow{\sigma}2$

$2\xrightarrow{\tau}3\xrightarrow{\sigma}1$, $4\xrightarrow{\tau}1\xrightarrow{\sigma}4$

置換の積＝あみだくじをくっつける

$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow$

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longleftrightarrow$



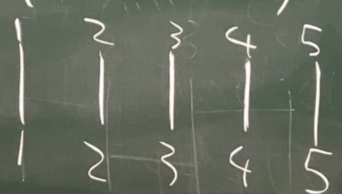
$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \longleftrightarrow$ $1 \to 3$, $2 \to 1$, $3 \to 2$, $4 \to 4$

定義 $\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ を単位置換という

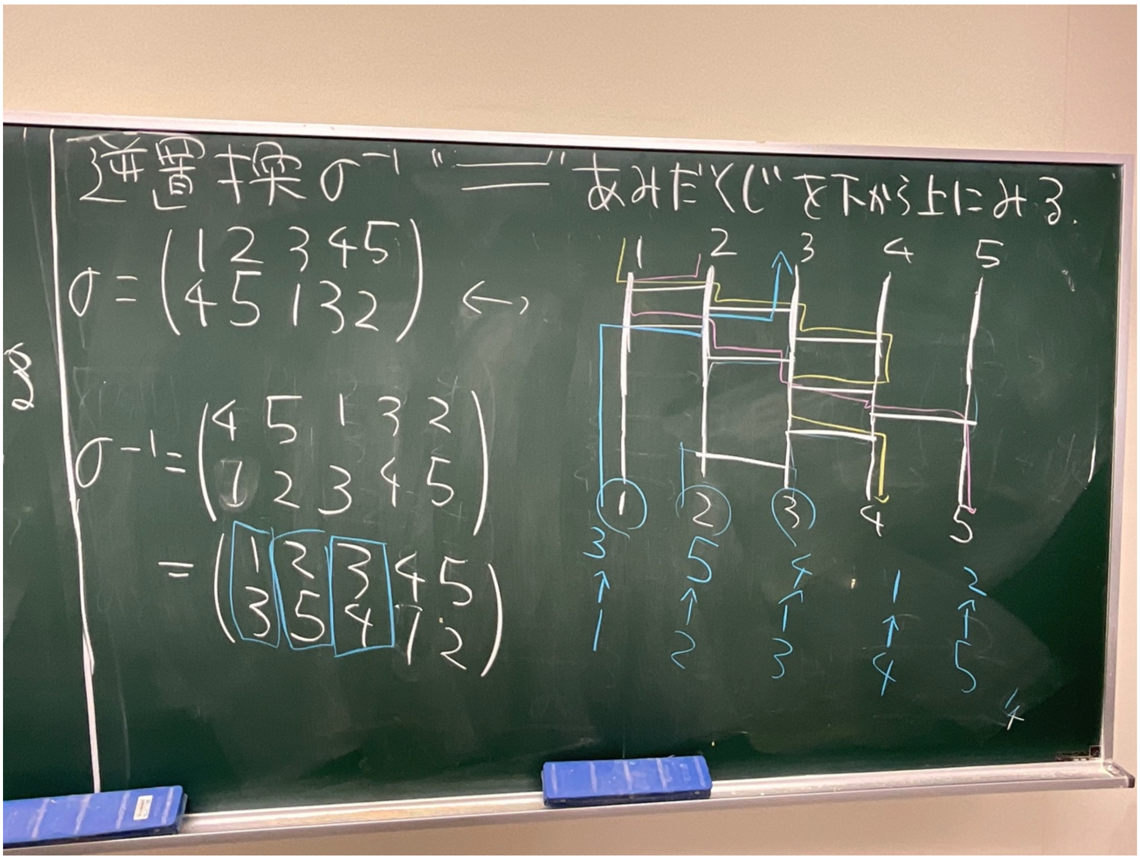
(i を i に対応させる規則)

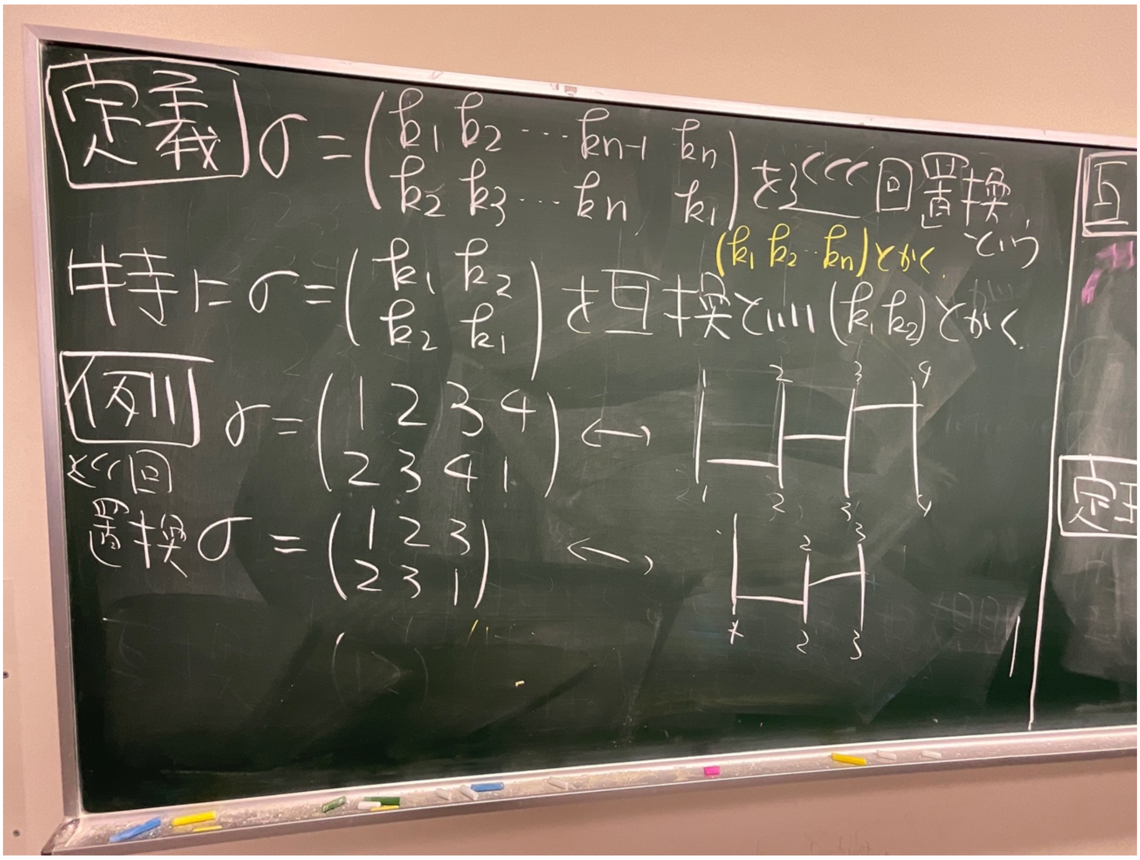
$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$ について $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ とする

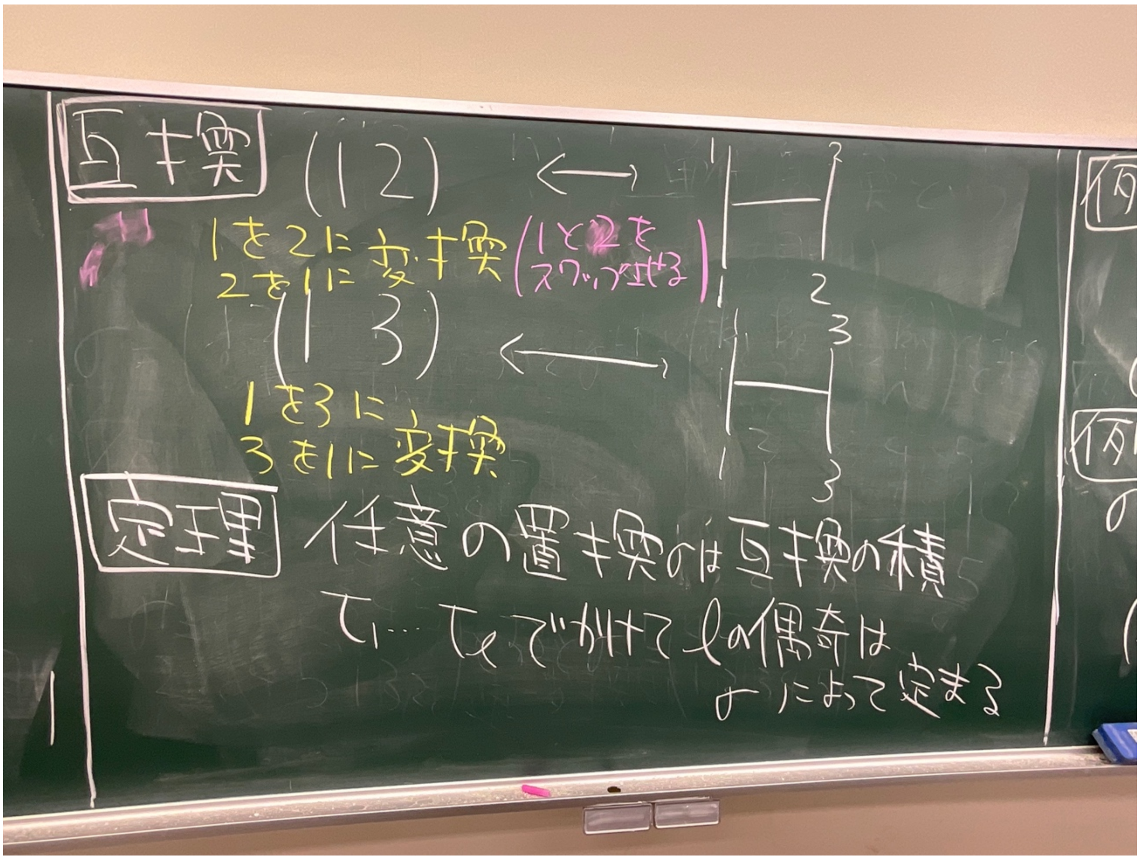
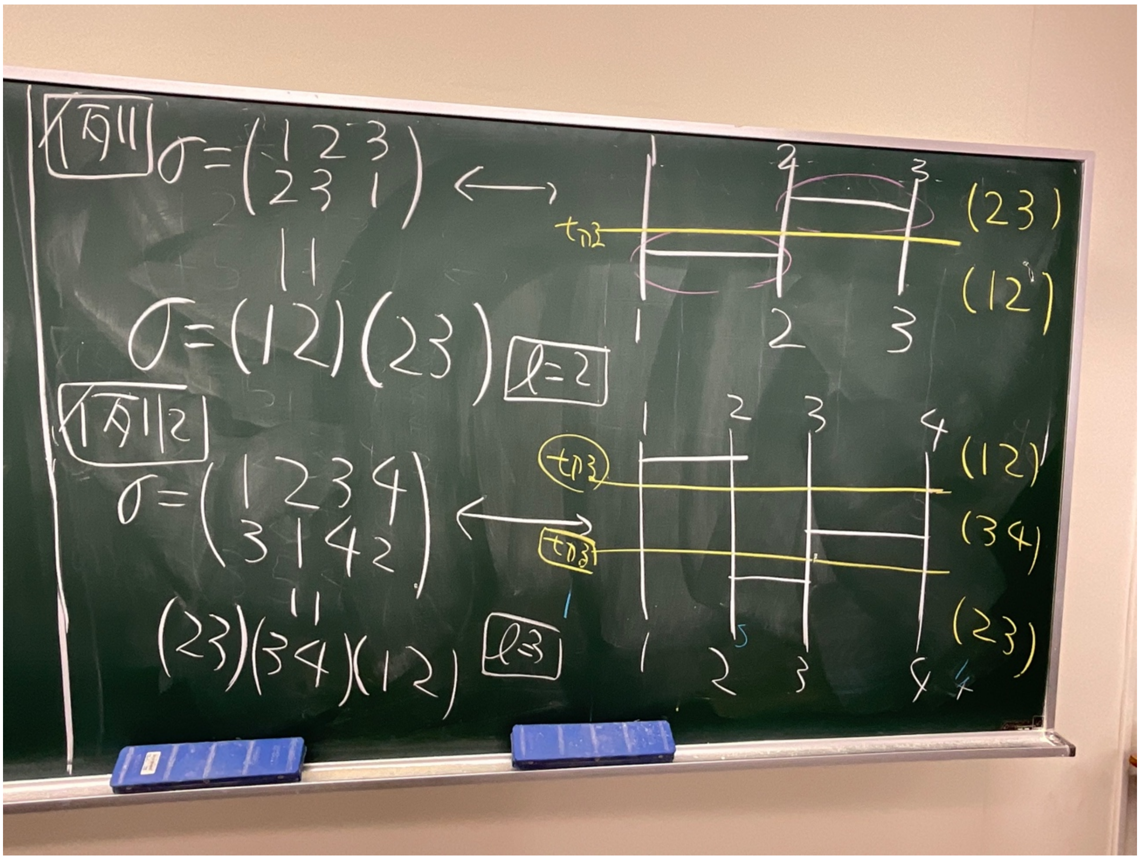
例 $\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \longleftrightarrow$



$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ とおくと $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ となる


逆置換 σ^{-1} "——" あみだくじを下から上にみる.
$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&5&1&3&2\end{pmatrix}$ ⟷
$\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}4&5&1&3&2\\1&2&3&4&5\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&5&4&1&2\end{pmatrix}$
1 2 3 4 5
1 2 3 4 5
$3 \leftarrow 1$, $5 \leftarrow 2$, $4 \leftarrow 3$, $1 \leftarrow 4$, $2 \leftarrow 5$


定義 $\sigma=\begin{pmatrix}k_1&k_2&\cdots&k_{n-1}&k_n\\k_2&k_3&\cdots&k_n&k_1\end{pmatrix}$ を巡回置換という
$(k_1\ k_2\ \cdots\ k_n)$ とかく.
特に $\sigma=\begin{pmatrix}k_1&k_2\\k_2&k_1\end{pmatrix}$ を互換といい $(k_1\ k_2)$ とかく.
例 $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$ ⟷
巡回置換 $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$ ⟷


互換
(1 2) ⟷
1を2に変換 (1と2をスワップさせる)
2を1に
(1 3) ⟷
1を3に、
3を1に変換
1 2
2 3
1 3
定理
任意の置換σは互換の積
τ1… τl でかけて lの偶奇は
σによって定まる

例1
σ=(1 2 3 / 2 3 1) ⟷
||
σ=(12)(23)
l=2
1 2 3
(23)
(12)
1 2 3
例2
σ=(1 2 3 4 / 3 1 4 2) ⟷
||
(23)(34)(12)
l=3
1 2 3 4
(12)
(34)
(23)
1 2 3 4

定理のいってることは…

① あみだくじは"H"を合成してつくれる

② その橋"H"の数の偶奇は σ によらない（スワップさせる回数）

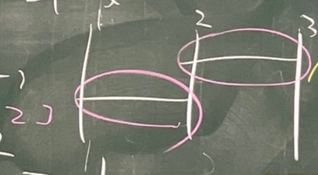
$\boxed{\text{定義}}$ 置換 σ について $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_\ell$ と互換の積でかくとき

・$\mathrm{sgn}\,\sigma = (-1)^\ell$ を σ の符号という（サイン）

・$\mathrm{sgn}\,\sigma = 1$ の置換を偶置換
　$\mathrm{sgn}\,\sigma = -1$ の 〃 奇置換 という

σ の符号"="あみだくじの橋の数が
$\begin{cases} \text{偶数なら } 1 \\ \text{奇数なら } -1 \end{cases}$

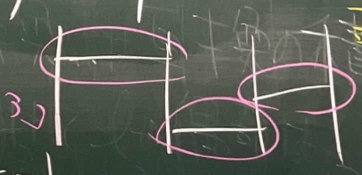
$\boxed{\text{例1}}$ $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ←



偶置換

$\mathrm{sgn}\,\sigma = (-1)^2 = 1$

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$



奇置換

$\mathrm{sgn}\,\sigma = (-1)^3 = -1$

命題 ① $\mathrm{sgn}\begin{pmatrix}1&2&3&\cdots&n\\1&2&3&\cdots&n\end{pmatrix}=1$

② $\mathrm{sgn}(\sigma^{-1})=\mathrm{sgn}\,\sigma$

③ $\mathrm{sgn}(\sigma\tau)=(\mathrm{sgn}\,\sigma)\times(\mathrm{sgn}\,\tau)$

証 ① $\begin{pmatrix}1&\cdots&n\\1&\cdots&n\end{pmatrix}$ は 0コの互換の積でかけるので $(-1)^0=1$

② $\sigma=\tau_1\cdots\tau_l$ と互換の積なら $\sigma^{-1}=\tau_l\tau_{l-1}\cdots\tau_1$
となるので $\mathrm{sgn}(\sigma^{-1})=(-1)^l=\mathrm{sgn}\,\sigma$

③ $\tau=\tau'_1\cdots\tau'_{l'}$ とおくと
$\sigma\tau=\tau_1\cdots\tau_l\tau'_1\cdots\tau'_{l'}$ より $\mathrm{sgn}(\sigma\tau)=(-1)^{l+l'}$ のため、

定義 $S_n=\{\{1,\ldots,n\}$ から $\{1,\ldots,n\}$ への置換$\}$ 対称群
$A_n=\{\sigma\in S_n \mid \mathrm{sgn}\,\sigma=1\}$ 交代群

命題 ① S_n の個数は $n!$ コ

② 偶置換と奇置換の数は同じ $(n\geq 2)$

③ A_n のこすうは $\frac{n!}{2}$ コ $(n\geq 2)$

④ $\sigma,\tau\in A_n \Rightarrow \sigma\tau\in A_n$

証

① S_nこすう = $1 \sim n$の順列ならびかえのこすう

$= n \times (n-1) \times \cdots 1 = n!$

② P_n: 奇置換の集合

$f: P_n \longrightarrow A_n$　1対1になる

$\sigma \longmapsto (12)\sigma$

③ (A_nのこすう) $= \frac{1}{2}$(A_nとP_nのこすう) $= \frac{1}{2}$(S_nのこすう)

④ $\mathrm{sgn}(\sigma\tau) = \mathrm{sgn}\,\sigma \times \mathrm{sgn}\,\tau$ からしたがう $= \frac{n!}{2}$

補足

A_5によって5次方程式の解の公式が存在しないことがいえる

(ガロア理論)

可解でない